МГЗПИ

Н. Я. ВИЛЕНКИН, В. Г. ПОТАПОВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ КОМБИНАТОРИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Н. Я. ВИЛЕНКИН, В. Г. ПОТАПОВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ КОМБИНАТОРИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебное пособие для студентов-заочников IV курса физико-математических факультетов педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

Рекомендовано к печати Главным управлением
высших и средних педагогических
учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Редактор МГЗПИ *Павлович О. А.*

Рецензенты:

Академик АН УССР, доктор физико-математических наук *Б. В. Гнеденко*,
доктор физико-математических наук *З. А. Скопец*,
доктор физико-математических наук *А. С. Солодовников*,
кандидат физико-математических наук *В. Х. Белый*,
кандидат физико-математических наук *О. А. Котий*

В $\dfrac{60602 - 292}{103\,(03) - 79}$ заказное

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга является задачником-практикумом по курсу «Теория вероятностей». Она написана в соответствии с программой этого курса и предназначена для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов.

Задачник состоит из трех глав, которые в свою очередь разбиты на параграфы. В начале каждого параграфа предельно кратко приводятся основные теоретические сведения, затем даются подробно разобранные типовые примеры и, наконец, предлагаются задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами и указаниями. Задачник содержит также тексты лабораторных работ, выполнение которых поможет студенту-заочнику лучше усвоить основные понятия математической статистики.

Материал задачника-практикума изложен в соответствии с учебным пособием А. С. Солодовникова «Теория вероятностей».

Прежде чем приступить к решению задач, следует ознакомиться с необходимым теоретическим материалом (ссылки на который даются в конце каждого из параграфов) по следующим пособиям:

1. Солодовников А. С. Теория вероятностей. М., «Просвещение», 1978.

2. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика. М., «Просвещение», 1976.

ГЛАВА I

СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основными понятиями теории вероятностей являются понятие *элементарного события*[1] и понятие *пространства элементарных событий*.

Под элементарным событием мы понимаем появление или непоявление того или иного исхода испытания.

Множество S, каждому элементу которого соответствует один исход испытания, называют *пространством элементарных событий*. Будем для простоты считать, что число элементарных событий конечно.

Подмножество пространства элементарных событий называют *случайным событием*. Это событие в результате испытания может произойти или не произойти (выпадение трех очков при бросании игральной кости, звонок в данную минуту по телефону и т. д.). Случайное событие называют *достоверным*, если оно заведомо произойдет (выпадение от одного до шести очков при бросании кости), и *невозможным*, если оно заведомо не может произойти (выпадение семи очков при бросании кости). При этом достоверное событие содержит все точки пространства элементарных событий, а невозможное событие не содержит ни одной точки этого пространства.

Два случайных события называют *несовместными*, если они не могут произойти одновременно при одном и том же исходе испытания.

Литература: [1], § 1, с. 5—7.

Пример 1. Испытание состоит в том, что бросают игральную кость один раз. Одним из пространств элементарных событий этого испытания является $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, где A_k означает, что выпало k очков. Это испытание описывает и другое пространство элементарных событий $\{A_ч, A_н\}$, где $A_ч$ означает выпадение четного числа очков, а $A_н$ — выпадение нечетного числа очков. В первом из этих пространств событие, означающее появление четного числа очков, содержит три элементарных события:

---

[1] В этом параграфе речь идет об интуитивном понятии события. Более точное определение дано в § 3.

выпадение двух, четырех и шести очков. Во втором пространстве событие, означающее появление четного числа очков, само является элементарным.

Задачи

1. Укажите пространства элементарных событий для следующих испытаний:

а) производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10;

б) проводится турнирный футбольный матч между двумя командами;

в) наудачу извлекается одна кость из полной игры домино.

Можно ли составить несколько пространств элементарных событий для какого-нибудь из этих испытаний?

2. Сколько элементарных событий содержит каждое из следующих случайных событий:

а) сумма двух наудачу выбранных однозначных чисел равна двенадцати (элементарное событие — появление пары однозначных чисел $(m; n)$);

б) наудачу выбранная кость из полной игры домино — «дубль» (элементарное событие — появление кости $m : n$, где m и n могут принимать значения 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 и $m<n$);

в) число очков, выпавшее на верхней грани игрального кубика, нечетное (элементарное событие — появление m очков, где m принимает значения 1; 2; 3; 4; 5; 6);

г) наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует тридцатому числу (элементарное событие — появление одного из 365 листков календаря);

д) наудачу выбранное слово из множества $A = \{$тор, куб, квадрат, гипотенуза, событие, перпендикуляр, ромб$\}$ содержит не менее двух гласных (элементарное событие — появление какого-либо из этих слов)?

3. На десяти жетонах выбиты числа 1; 2; 3; ...; 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких из следующих ответов указаны все возможные исходы испытания:

а) {четное; нечетное},

б) {простое; 4; 6; 8; 9; 10},

в) {четное; 1; 3; 5},

г) {не более трех; не менее четырех}?

4. Для испытания, состоящего в двукратном броске игрального кубика, запишите все возможные исходы испытания, если элементы пространства элементарных событий S:

а) являются упорядоченными парами чисел m и n;

б) являются неупорядоченными парами чисел m и n;

в) являются суммами m и n.

Во всех трех случаях m и n выражают число очков, выпавших при каждом броске.

5. В каких из следующих примеров указаны все возможные исходы испытания:

а) выигрыш, проигрыш в шахматной партии;

б) выпадение (в указанном порядке) герба — герба, герба — цифры, цифры — цифры при двукратном подбрасывании монеты;

в) попадание, промах при одном выстреле;

г) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при однократном бросании кости?

6. Укажите, какие из следующих событий являются: 1) случайными, 2) достоверными, 3) невозможными:

а) выигрыш по одному билету автомотолотереи;

б) извлечение из урны цветного шара, если в ней находятся 3 синих и 5 красных шаров;

в) получение абитуриентом 25 баллов на вступительных экзаменах в институте при сдаче четырех экзаменов, если применяется пятибалльная система оценок;

г) извлечение «дубля» из полной игры в домино;

д) выпадение не более шести очков на верхней грани игрального кубика.

7. Какие из следующих пар событий являются несовместными:

а) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 100 включительно: делится на 10; делится на 11;

б) нарушение в работе: первого; второго мотора летящего самолета;

в) попадание; промах при одном выстреле;

г) выигрыш; проигрыш в шахматной партии;

д) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 25 включительно является: четным; кратным трем?

8. Сколько событий, включая невозможное и достоверное, можно составить из пространства элементарных событий $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$? Укажите их.

§ 2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть производится некоторое испытание, которое может иметь n и только n различных исходов. Будем считать, что все эти исходы несовместны (не могут произойти одновременно) и равновероятны (данное понятие лежит за рамками математической теории и понимается в интуитивном смысле). Каждому событию A, являющемуся подмножеством пространства элементарных событий проводимого испытания, поставим в соответствие число

$$p(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где m — число исходов испытания, благоприятствующих событию A. Число $p(A)$ называют *вероятностью* события A при данном испытании.

Литература: [1], § 4, с. 20—24.

Указания. Анализ и решение задач, в которых вероятность рассматриваемого события вычисляется по формуле (1), могут быть выполнены по следующей схеме:

1. Уясните, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче.
2. Установите, являются ли исходы испытания несовместными и равновероятными.
3. Подсчитайте число всех возможных исходов испытания (n).
4. Сформулируйте событие, вероятность наступления которого необходимо найти.
5. Подсчитайте число исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию (m).
6. По формуле (1) вычислите вероятность появления рассматриваемого события.

Пример 2. Из 35 экзаменационных билетов, занумерованных с помощью целых чисел от 1 до 35, наудачу извлекается один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем?

Решение. Испытание состоит в том, что извлекается один билет. Так как билет вытягивается наудачу, то все исходы испытания равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число возможных исходов испытания равно 35. Событие A означает, что номер взятого билета кратен трем. Этому событию благоприятствуют 11 исходов испытания $\{3; 6; 9; \ldots; 33\}$. Следовательно, по формуле (1) искомая вероятность равна

$$p(A) = \frac{11}{35}.$$

Задачи

9. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число является делителем числа 30?

10. Какова вероятность того, что наудачу выбранный день из числа дней одного столетия обладает следующим свойством: число, номер месяца и последние две цифры года записаны с помощью одной из цифр 1, 2, ..., 9?

11. На одинаковых карточках в троичной системе счисления записаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что записанное на ней число содержит: а) не менее двух единиц; б) хотя бы одну двойку; в) один нуль?

12. Какова вероятность того, что число на вырванном наудачу листке нового календаря: а) кратно пяти; б) равно 29, если в году 365 дней?

13. Из полной игры лото наудачу извлекается один бочонок. На бочонках написаны числа от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что на извлеченном бочонке написано простое число?

14. В коллекции 200 монет, из которых 25 монет XVIII века Какова вероятность того, что наудачу выбранная монета датирована XVIII веком?

15. На четырех карточках написаны числа 1, 2, 3 и 4. Какова вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на 3?

16. Какова вероятность того, что кость, наудачу извлеченная из полного набора домино, имеет сумму очков, равную пяти?

17. В группе 6 юношей и 18 девушек. По жребию разыгрывается один билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит девушка?

18. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Определите вероятность того, что извлеченный наудачу кубик будет иметь ровно две окрашенные грани

19. Игральная кость бросается дважды. Каждому из 36 элементарных событий приписывается одна и та же вероятность. Найдите вероятность того, что сумма очков равна n для $n = 2, 3, 4$ $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

20. Монета бросается три раза подряд. Перечислите все возможные исходы этих трех последовательных бросаний (например один из исходов может быть в виде ГЦГ, где Г — выпадение герба, а Ц — цифры). Припишем всем исходам одну и ту же вероятность. Найдите вероятности следующих событий:

а) число выпадений герба больше числа выпадений цифры
б) выпадает в точности два герба;
в) результаты всех бросаний одинаковы.

§ 3. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение 1. Назовем *алгеброй событий* любое множество F с выделенной в нем совокупностью подмножеств M, такое что:

а) вместе с подмножеством A в M входит дополнение $\overline{A}$,

б) вместе с любой счетной совокупностью подмножеств A_1 A_2, A_n, ... в M входит их объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

В силу равенства

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n}$$

отсюда следует, что вместе с любой счетной совокупностью подмножеств A_1, A_2, ..., A_n, ... в M входит их пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Если множество F конечно, условие б) можно заменить более простым условием б$'$): вместе с подмножествами A и B в М входит их объединение.

Определение 2. Объединение двух подмножеств A и B из совокупности М называется *суммой* соответствующих событий и обозначается $A + B$. Событие $A + B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B.

Определение 3. Пересечение подмножеств A и B из совокупности М называется *произведением* соответствующих событий и обозначается AB. Событие AB происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B.

Определение 4. Если $AB = \varnothing$, события A и B называются *несовместными*, а если $AB \neq \varnothing$ — *совместными*.

Определение 5. События A и B называются *противоположными*, если подмножества A и B взаимно дополнительны в М. Пишут $B = \bar{A}$.

Определение 6. Если $A \subset B$, где $A \in$ М и $B \in$ М, то говорят, что событие B — *следствие* события A или что A влечет за собой B.

Определение 7. Выбор элемента x в F назовем *испытанием*. Если $x \in A$, $A \in$ М, то скажем, что при этом испытании произошло событие A. Если рассматриваемое событие произошло, то поставим ему в соответствие цифру 1, а если не произошло — поставим 0. Используя данные выше определения, получим следующие *таблицы операций над событиями*:

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	1	1

$A + B$

$A \backslash B$	0	1
0	0	0
1	0	1

AB

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Операции сложения, умножения и отрицания событий удобно иллюстрировать диаграммами Эйлера — Венна (рис. 1, 2, 3).

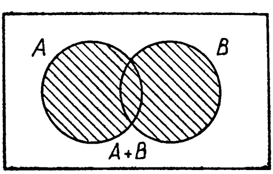


Рис. 1

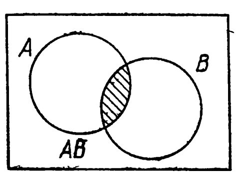


Рис. 2

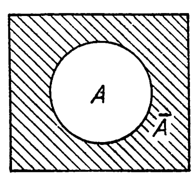


Рис. 3

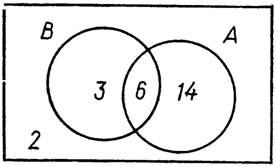


Рис. 4

Л и т е р а т у р а: [1], § 3, с. 13—18.

П р и м е р 3. Событие A означает, что хотя бы одна пуля при четырех выстрелах попадает в цель. Что означает событие $\overline{A}$?

Р е ш е н и е. Событие $\overline{A}$ означает, что ни одна из четырех пуль не попала в цель.

П р и м е р 4. Известно, что события A и B произошли, а событие C не произошло. Определим, произошло или не произошло событие $(A + \overline{B})(B + \overline{C})$.

Р е ш е н и е. Используя таблицы операций над событиями получим:

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A+\overline{B}$	$B+\overline{C}$	$(A+\overline{B})(B+\overline{C})$
1	1	0	0	1	1	1	1

Значит, событие $(A + \overline{B})(B + \overline{C})$ произошло.

П р и м е р 5. Докажем, что $A\overline{B} + B = A + \overline{A}B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся тем, что событие $B = AB + \overline{A}B$ (см. рис. 2). Тогда $A\overline{B} + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$. Но событие $A\overline{B} + AB = A(\overline{B} + B) = A$, так как событие $\overline{B} + B$ — достоверное. Таким образом, $A\overline{B} + B = A + \overline{A}B$.

П р и м е р 6. Из 25 студентов группы 20 человек увлекаются спортом (событие A), 9 — музыкой (событие B), 6 — музыкой и спортом (событие AB). Построим диаграмму Эйлера — Венна и покажем, что означают события $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A + B}$.

Р е ш е н и е. Строим диаграмму Эйлера — Венна (рис. 4). Круги обозначают события A и B, пересечение кругов — событие AB. Пересечению кругов соответствует число студентов, увлекающихся музыкой и спортом, т. е. 6 человек. События $A\overline{B}$ и $\overline{A}B$ означают соответственно, что 14 студентов увлекаются только спортом, а 3 — только музыкой. Значит, музыкой или спортом увлекаются 23 студента, и потому событие $\overline{A + B}$ означает, что только двое из студентов не имеют этих увлечений.

Задачи

21. Из урны, содержащей шары белого, черного и синего цвета, наудачу извлекается один шар. События A_1 и A_2 соответственно означают появление белого и черного шаров. Что означает событие $A_1 + A_2$?

22. Имеется 100 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 100. Событие A — извлечение жетона, номер которого кратен двум, а событие B — извлечение жетона, номер которого кратен пяти. Что означают события: а) $A + B$; б) AB?

23. Дана электрическая цепь с элементами e_1 и e_2 (рис. 5). Событие A_1 — выход из строя элемента e_1, событие A_2 — выход из строя элемента e_2. Что означает событие $A_1 + A_2$?

24. Дана электрическая цепь с элементами e_1 и e_2 (рис. 6). Если событие A_1 — выход из строя элемента e_1, событие A_2 — выход из строя элемента e_2, то что означает событие A_1A_2?

25. Событие A означает появление шести очков на верхней грани игрального кубика. Что означает событие $\overline{A}$?

26. Событие A состоит в том, что хотя бы одна из имеющихся 15 электрических лампочек нестандартная. Что означает событие $\overline{A}$?

27. Какие из следующих пар событий противоположны:

1) экзамен студентом сдан на «отлично»; сдан на «неудовлетворительно»;

2) хотя бы одна пуля при двух выстрелах попадает в цель; ни одна из двух пуль при двух выстрелах не попадает в цель;

3) вынутая наугад кость из полного набора домино — «дубль»; вынутая кость не «дубль»?

28. Бросается игральная кость. Какие из следующих событий несовместны, а какие — совместны:

а) A — выпало четное число очков, B — выпало нечетное число очков;

б) A — выпало нечетное число очков, B — выпавшее число очков кратно трем;

в) A — выпало простое число очков, B — выпало четное число очков?

29. Выбирается один человек из студенческой группы. Какие из следующих событий несовместны, а какие — совместны:

а) A — выбран юноша, B — выбрана девушка;

б) A — выбран юноша, B — выбран член ВЛКСМ;

в) A — выбрана девушка, B — выбран мастер спорта по футболу?

30. Из полного набора шахмат выбирается одна фигура или пешка. Какие из следующих событий являются следствиями других:

а) A — выбран король, B — выбрана фигура;

б) A — выбрана черная фигура, B — выбран черный король?

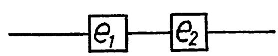


Рис. 5

31. Если событие A_1 — выигрыш по билету одной лотереи, A_2 — выигрыш по билету другой лотереи, то что означают события:

$$B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2,$$

$$C = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 + A_1A_2?$$

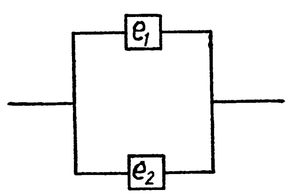


Рис. 6

32. События A_1, A_2, A_3 означают соответственно попадание в цель при первом, втором и третьем выстрелах, а события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ означают соответственно промахи. Опишите события:

$$B = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3,$$
$$C = A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3.$$

33. Известно, что события A и B произошли, а событие C не произошло. Определите, произошли или не произошли следующие события: $A + BC$; $(A + B)C$; $\bar{A}B + C$; ABC.

34. Используя таблицы операций над событиями, докажите тождества: $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$; $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$; $A\bar{B} + B = A + B$.

35. Упростите выражения для событий: AB, $A + B$, $A + B + C$, $(A + B)C$, если известно, что $A \subset B$.

36. Докажите, что событие $A + \bar{A}B + \overline{A + B}$ достоверно.

37. Используя диаграммы Эйлера — Венна, дайте геометрическую интерпретацию событий: $\bar{A}B + A$, $(A + B)\bar{C}$, $\overline{\bar{A} + \bar{B}}$, $\overline{\bar{A}\bar{B}}$.

38. Среди студентов, сдавших экзамен по теории вероятностей выбирают наудачу одного. Пусть событие A состоит в том, что выбранный окажется старше двадцати лет, событие B — в том, что выбранный получил «отлично» на экзамене, а событие C — что он живет в общежитии.

а) Опишите событие $\bar{A}BC$.

б) При каком условии имеет место равенство $ABC = A$?

в) При каком условии выполняется соотношение $\bar{A} \subset C$?

г) Будет ли иметь место событие $\bar{A}B$, если девятнадцатилетний Саша Петров получил на экзамене отметку «отлично»?

39. Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ заключается в том, что i-тая изготовленная им деталь имеет дефект. Запишите событие, заключающееся в том, что:

а) ни одна из деталей не имеет дефектов;

б) только одна деталь имеет дефект;

в) не более двух деталей имеют дефекты.

40. Из полного набора костей домино выбрана одна кость. Среди следующих пар событий выберите несовместные:

а) A — «дубль», B — на одной из половин кости 6 очков;

б) A — «дубль», B — сумма очков нечетна;

в) A — на одной из половин кости «пустышка», B — сумма очков больше шести;

г) A — сумма очков больше четырех, B — сумма очков нечетна.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть $\{F; \mathrm{M}\}$ — σ-алгебра событий. *Вероятностью* на этой алгебре называют функцию p, ставящую в соответствие каждому подмножеству $A \in \mathrm{M}$ число $p(A)$, причем:

а) для всех $A \in \mathbf{M}$ имеем $p(A) \geqslant 0$,

б) $p(F) = 1$,

в) если события $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно несовместны, то

$$p\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i).$$

В частности, для двух несовместных событий A и B.

$$p(A + B) = p(A) + p(B). \tag{2}$$

Если же события A и B совместные, то

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB). \tag{3}$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любого набора $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ этих событий выполняется равенство

$$p(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = p(A_{i_1})\, p(A_{i_2}) \ldots p(A_{i_k}).$$

Они называются *попарно независимыми*, если из $i \neq j$ следует, что

$$p(A_i A_j) = p(A_i)\, p(A_j).$$

В частности; для двух независимых событий A и B

$$p(AB) = p(A)\, p(B). \tag{4}$$

Литература: [1], § 2, с. 10—13, § 12, с. 48—53.

Указания. Анализ и решение задач, включенных в данный параграф, можно осуществлять по следующей схеме:

1. Уясните, в чем состоит рассматриваемое в задаче испытание.
2. Обозначьте буквами события, рассматриваемые в условии задачи.
3. С помощью введенных обозначений выразите событие, вероятность наступления которого необходимо найти.
4. Если требуется найти вероятность суммы событий, выясните, совместны или несовместны рассматриваемые события. Если же требуется найти вероятность произведения событий, выясните, зависимы или независимы рассматриваемые события.
5. Выберите соответствующую условию задачи формулу и выполните необходимые вычисления.

Пример 7. В двух коробках лежат карандаши одинаковой величины и формы, но разного цвета. В первой коробке 4 красных и 6 черных, а во второй 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимается наугад по одному карандашу. Какова вероятность того, что оба карандаша окажутся красными?

Решение. Испытание состоит в том, что из каждой коробки вынимается по одному карандашу. Пусть событие A означает, что вынутый карандаш из первой коробки оказался красным, событие

B — что вынутый карандаш из второй коробки тоже красный. Тогда событие AB означает, что оба вынутые карандаша оказались красными. Поскольку события A и B независимы, то $p(AB) = p(A)\,p(B)$. Вероятности событий A и B равны соответственно $p(A) = 0{,}4$, $p(B) = 0{,}3$. Следовательно, вероятность того, что оба карандаша оказались красными, равна $p(AB) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

П р и м е р 8. Стрелок ведет огонь по цели, движущейся на него. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,4 и увеличивается на 0,1 при каждом последующем выстреле. Какова вероятность получить два попадания при трех независимых выстрелах?

Р е ш е н и е. Испытание состоит в том, что производятся три выстрела по цели. Пусть события A_1, A_2, A_3 означают попадания соответственно при первом, втором и третьем выстрелах. Тогда $\bar{A}_1$ $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ будут означать соответствующие промахи. Используя эти события, выразим событие, означающее два попадания при трех выстрелах: $A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$. События $A_1A_2\bar{A}_3$, $A_1\bar{A}_2A_3$, $\bar{A}_1A_2A_3$ несовместны, а события $A_1, A_2, A_3, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ независимы. Отсюда следует, что $p(A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3) = p(A_1)\,p(A_2)\,p(\bar{A}_3) + p(A_1)\,p(\bar{A}_2)\,p(A_3) + p(\bar{A}_1)\,p(A_2)\,p(A_3)$. Но $p(A_1) = 0{,}4$, $p(A_2) = 0{,}5$, $p(A_3) = 0{,}6$. Следовательно,

$$p(\bar{A}_1) = 0{,}6, \quad p(\bar{A}_2) = 0{,}5, \quad p(\bar{A}_3) = 0{,}4.$$

Значит, искомая вероятность равна

$$p(A_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2A_3) = 0{,}38.$$

П р и м е р 9. Вероятность поражения цели одной ракетой равна 0,7, а другой — 0,8. Какова вероятность того, что хотя бы одна из ракет поразит цель, если они выпущены независимо друг от друга?

Р е ш е н и е 1. Испытание состоит в том, что две ракеты выпущены по цели. Пусть событие A означает, что первая ракета поразила цель, а событие B — что вторая ракета поразила цель. Тогда событие $A + B$ означает, что хотя бы одна ракета поразила цель. События A и B совместны. Поэтому $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$. Кроме того, из условия задачи следует, что события A и B независимы. Значит, $p(A + B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94$.

Р е ш е н и е 2. Пусть событие C состоит в том, что хотя бы одна ракета поразила цель. Тогда противоположное ему событие $\bar{C}$ состоит в том, что обе ракеты прошли мимо цели. Значит, $\bar{C}=\bar{A}\bar{B}$, где $\bar{A}$ означает промах первой ракеты, а $\bar{B}$ — промах второй. Но

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - p(\bar{A}\bar{B}) = 1 - p(\bar{A})\,p(\bar{B}),$$

так как события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ независимы. Вычисляем $p(\bar{A}) = 0{,}3$ и $p(\bar{B}) = 0{,}2$. Следовательно, $p(C) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}94$.

Задачи

41. Экзаменационные работы по математике, которые писали абитуриенты при поступлении в институт, зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?

42. Вероятность того, что початки кукурузы имеют 12 рядов, равна 0,49, 14 рядов — 0,37 и 16—18 рядов — 0,14. Какова вероятность того, что наудачу выбранный початок будет иметь 12 или 14 рядов?

43. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 — волейболом, 5 — волейболом и баскетболом, а остальные — другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

44. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем 5 книг стоят по 4 руб. каждая, 3 книги — по 2 руб. и 2 книги — по 1 руб. Найти вероятность того, что взятая наудачу книга стоит не дороже двух рублей.

45. Контрольная работа состоит из трех задач по алгебре и трех по геометрии. Вероятность правильно решить задачу по алгебре равна 0,8, а по геометрии — 0,6. Какова вероятность правильно решить все три задачи хотя бы по одному из предметов?

46. Производятся 4 независимых выстрела. Вероятность поражения цели стрелком при каждом из выстрелов равна p. Какова вероятность того, что первые два выстрела будут попаданиями, а последующие два — промахами?

47. Известно, что при каждом измерении равновероятны как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при трех независимых измерениях все ошибки будут положительными?

48. Из двух полных наборов шахмат наудачу извлекают по одной фигуре или пешке. Какова вероятность того, что обе фигуры окажутся слонами?

49. Ученик отвечает на 5 вопросов словами «да» и «нет». Какова вероятность того, что ответы на все вопросы оказались правильными, если он отвечал наудачу?

50. Пусть $p(AB) = \frac{1}{4}$, $p(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ и $p(B) = \frac{1}{2}$. Найдите $p(A+B)$.

51. Пусть $p(A) = \frac{1}{2}$ и $p(B) = \frac{2}{3}$. Совместны ли события A и B?

52. Выполненная контрольная работа состоит из задачи и примера. Вероятность того, что в наудачу выбранной работе правильно решена задача, равна 0,8, а того, что получен хотя бы один правильный ответ, — 0,9. Найдите вероятность того, что правильно решен пример.

53. В студенческой группе 0,9 всего состава группы успешно сдали экзамен, причем 0,4 всех студентов получили отметку «отлично». Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент получил отметку «хорошо» или «удовлетворительно»?

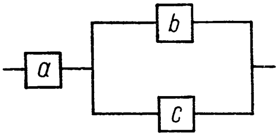


Рис. 7

54. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй экзамен —0,85 и третий — 0,8. Какова вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов?

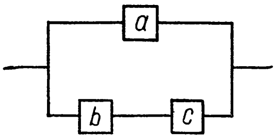


Рис. 8

55. Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,9, второго — 0,75. Какова вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель?

56. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение часа равна 0,9, а второго — 0,95. Какова вероятность того, что в течение часа произойдет нарушение в работе только одного станка, если станки работают независимо друг от друга?

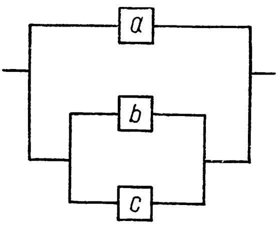


Рис. 9

57. Электрическая цепь составлена по схеме, изображенной на рисунке 7. Элементы цепи работают независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя за время t элемента цепи a равна 0,1, элемента b — 0,2 и элемента c — 0,3. Найдите вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.

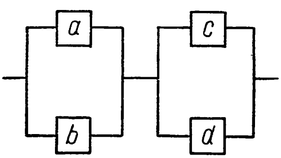


Рис. 10

58. Используя условия предыдущей задачи, найдите вероятность разрыва цепей, схемы которых изображены на рисунках 8 и 9.

59. Электрическая цепь составлена по схеме, изображенной на рисунке 10. Элементы цепи работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы за время t элемента цепи a равна 0,6, элемента b — 0,7, элемента c — 0,8 и элемента d — 0,9. Найдите вероятность бесперебойной работы этой цепи за указанный промежуток времени.

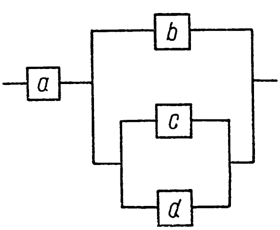


Рис. 11

60. Электрическая цепь составлена по схеме, изображенной на рисунке 11. Элементы цепи работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы за время t элемента цепи a равна 0,5, а элементов b, c, d — соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Найдите вероятность бесперебойной работы этой цепи за указанный промежуток времени.

61. Из колоды, содержащей 52 карты, наугад извлекается одна карта. Событие A означает, что извлеченная карта является тузом, событие B — что вынута карта трефовой масти. Найдите вероятности $p(A)$, $p(B)$, $p(AB)$. Независимы ли события A и B? Решите эту же задачу при условии, что в колоду добавлена карта «джокер», не имеющая масти и не являющаяся тузом.

62. Пусть события A и B независимы. Докажите, что следующие пары событий тоже независимы:

а) A и $\bar{B}$; б) $\bar{A}$ и B; в) $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

63. Пусть S — множество всех исходов при трехкратном бросании монеты. Обозначим через A событие «в первый раз выпал герб», через B событие «выпало не менее двух гербов». Найдите вероятности событий $p(A)$, $p(B)$ и $p(AB)$, если все исходы бросаний равновероятны. Независимы ли эти события?

64. Пусть p и q — вероятности на алгебре событий. Являются ли вероятностями на этой же алгебре:

а) $p+q$; б) p^2; в) $\lambda p + \mu q$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $\lambda + \mu = 1$?

§ 5. ПРАВИЛА СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Правило суммы. *Если объект A может быть выбран m способами, а объект B — другими n способами, причем выборы объектов A и B несовместны, то выбор «либо A либо B» может быть осуществлен $m+n$ способами.*

Правило произведения. *Если объект A может быть выбран m способами и после каждого из этих выборов объект B может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (A, B) может быть осуществлен mn способами.*

Литература: [1], § 5, с. 25—29.

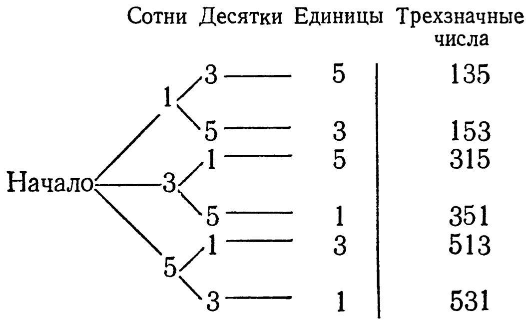
Пример 10. На книжной полке стоят 20 книг по алгебре, 12 — по теории вероятностей, 7 — по математическому анализу и 25 — по литературе. Сколькими способами можно выбрать книгу по математике?

Решение. Найдем число способов, которыми можно выбрать книгу по алгебре, или по теории вероятностей, или по математическому анализу. Книгу по алгебре можно выбрать 20 способами, по теории вероятностей — 12 способами и по математическому анализу — 7 способами. Эти выборы несовместны. Поэтому по правилу суммы находим, что выбрать книгу по математике можно $N = 20 + 12 + 7 = 39$ способами.

Пример 11. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, если цифры в числе не повторяются?

Решение. На месте сотен поставим любую из трех цифр. После каждого такого выбора на месте десятков можно поставить любую из двух оставшихся цифр, так как цифры в числе не повторяются. Наконец, на месте единиц можно поставить оставшуюся одну цифру. Повторным применением правила произведения найдем число трехзначных чисел, равное $N = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Графической иллюстрацией правила произведения является специальный граф, называемый «деревом». Из исходной точки дерева проводится n_1 ветвей, соответствующих выбору объекта A, а из каждого конца полученной ветви дерева проводится n_2 ветвей, соответствующих выбору объекта B, и т. д. Так для примера 11 имеем следующее «дерево»:



Пример 12. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех разных букв, можно образовать из букв слова *ученик*?

Решение. Слово *ученик* состоит из шести различных букв. По правилу произведения можно составить $N_1 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ четырехбуквенных слов, $N_2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ пятибуквенных и $N_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ шестибуквенных слов. По правилу суммы всего можно составить $N = 360 + 720 + 720 = 1800$ слов, состоящих не менее чем из четырех букв.

Задачи

65. В магазине имеется 6 сортов шоколадных конфет и 4 сорта карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?

66. Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автомотолотереи. Сколькими способами можно выбрать один билет спортлото или автомотолотереи?

67. В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2 санитара. Сколькими способами можно выбрать одного солдата так, чтобы он был разведчиком или санитаром? Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?

68. Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 3 первых, 4 вторых и 2 третьих блюда?

69. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число $*2*5$? в число $3*7*$?

70. У одного человека имеется 7 книг по математике, а у другого — 9. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?

71. Сколько различных трехбуквенных «слов» можно составить из букв слова *ромб*?

72. Сколько существует различных положений, в которых могут оказываться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен? Постройте «дерево» для всех возможных положений переключателей.

73. Сколько различных трехзначных чисел, меньших 400, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что цифры в числе не должны повторяться? Решите ту же задачу при условии допустимости повторения цифр.

74. В букинистическом магазине продаются 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, имеется 5 томов, состоящих из романов «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, состоящих из романов «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

75. В магазине имеется 5 сортов конфет. Сколько различных покупок, содержащих не более трех сортов конфет, можно сделать в этом магазине (покупки считаются одинаковыми, если они состоят из одинаковых сортов конфет)?

76. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из нечетных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется?

77. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ребенку дают не более трех разных имен?

§ 6. ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

Если множества A и B содержат соответственно m и l элементов, а их пересечение $A \cap B$ содержит p элементов, то объединение $A \cup B$ множеств A и B имеет $m + l - p$ элементов. Это утверждение можно записать так:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Для любых подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, взятых из множества X, справедливо общее правило

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k) -$$
$$- n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_{k-1} \cap A_k) +$$

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k). \quad (5)$$

Эта формула, обобщающая правило суммы, называется *формулой включений и исключений.*

Из формулы (5) вытекает, что число элементов, не принадлежащих ни одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, выражается формулой

$$N' = n(X) - n(A_1) - \ldots - n(A_k) + n(A_1 \cap A_2) + \ldots + \\ + n(A_{k-1} \cap A_k) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \ldots + \\ + (-1)^k n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \ldots . \quad (6)$$

Литература: [2], § 2, с. 20—22.

Пример 13. По итогам экзаменационной сессии из 35 студентов отличную отметку по математической логике имели 14 студентов, по физике — 15, по педагогике — 18, по логике и физике — 7, по логике и педагогике — 9, по физике и педагогике — 6, по всем трем предметам — 4. Сколько студентов получили хотя бы по одной отличной отметке?

Решение. Обозначим через A множество студентов, получивших отличную отметку по математической логике, через B— по физике и через C — по педагогике. Тогда

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - \\ - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 14 + 15 + 18 - 7 - 9 - 6 + 4 = 29.$$

Задачи

78. Староста курса представил следующий отчет о физкультурной работе: «Всего на курсе 45 студентов. Из них в футбольной секции состоят 25 человек, в баскетбольной — 30 и в шахматной — 28; 16 человек одновременно занимаются и в футбольной и в баскетбольной секциях, 18 — в футбольной и шахматной секциях, 17 — в баскетбольной и шахматной. А 15 студентов занимаются во всех трех секциях». Объясните, почему отчет был забракован.

79. В течение 30 дней сентября было 12 дождливых дней, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, 2 ветреных и холодных, а один день был и дождливым, и ветреным, и холодным. В течение скольких дней в сентябре стояла хорошая погода?

80. В одном из отделов научно-исследовательского института работают несколько человек, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык, причем 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 знают английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский, а один из них знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько человек знает только один иностранный язык? Дайте иллюстрацию решения на диаграмме Эйлера—Венна.

81. Докажите, что если

$$n(A_1) = n(A_2) = \dots = n(A_m) = N_1,$$
$$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_3) = \dots = n(A_{m-1} \cap A_m) = N_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = N_m,$$

то

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} C_m^k N_k.$$

82. Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

83. Сколько натуральных чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

84. Известно, что в группе 36 студентов. Из них 10 человек выписывают одну из газет: «Правда», «Известия», «Советский спорт», «Советская Россия»; 8 человек — по две из этих газет; 7 человек — по три, а 4 человека — все эти газеты. Остальные студенты выписывают газету «Комсомольская правда». Сколько человек выписывают эту газету?

§ 7. РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ И БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ. ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Размещениями с повторениями из n элементов по r называют кортежи длины r, составленные из элементов множества X, содержащего n элементов (или, как кратко говорят, n-множества). Число таких размещений выражается формулой

$$\tilde{A}_n^r = n^r. \tag{7}$$

Такие размещения называют также *упорядоченными выборками r элементов из данных n с возвращением*.

Упорядоченные множества длины r, составленные из элементов n-множества, называют *размещениями без повторений из n элементов по r*. Их число выражается формулой

$$A_n^r = n(n-1)\dots(n-r+1). \tag{8}$$

Такие размещения называют также *упорядоченными выборками r элементов из данных n без возвращения*.

Если $r = n$, то говорят *о перестановках без повторений длины n* (или из n элементов). Их число выражается формулой

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{9}$$

r-подмножества n-множества X называют *сочетаниями из n элементов по r без повторений*. Их число выражается формулой

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{A_n^r}{P_r}, \tag{10}$$

или

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}. \qquad (10')$$

Литература: [1], § 6—7, с. 29—37.

Указания. Решение задач на вычисление числа размещений (с повторениями или без повторений), перестановок и сочетаний без повторений рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Подсчитайте число элементов n основного множества.
2. Подсчитайте число элементов r, входящих в выборку (т. е. длину кортежа или мощность подмножества).
3. Выясните, упорядочены ли выборки.
4. При подсчете числа кортежей в случае размещений с повторениями пользуйтесь формулой (7).
5. При подсчете числа кортежей в случае размещений без повторений пользуйтесь формулой (8), в частности при $n = r$ — формулой (9).

Пример 14. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никому из них не будет поставлена неудовлетворительная оценка?

Решение. Каждый из студентов может получить любую из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно». Значит, рассматриваемое множество X состоит из трех различных элементов. При этом порядок расстановки отметок существен, отметки могут повторяться, а общее число поставленных отметок равно четырем (например, «отлично», «хорошо», «отлично», «удовлетворительно».) Следовательно, необходимо составить размещения с повторениями из трех элементов по четыре. А это число равно $\tilde{A}_3^4 = 3^4 = 81$.

Пример 15. В комитет комсомола избрали 9 человек. Из них надо выбрать секретаря и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Из множества, содержащего 9 различных элементов, выбираются 2 элемента. Порядок существен (например, выборы a_1 — секретарь, a_2 — заместитель и a_2 — секретарь, a_1 — заместитель, состоящие из одних и тех же элементов, различны). Элементы не могут повторяться. Следовательно, необходимо найти число размещений без повторений из девяти элементов по два элемента в каждом, т. е. A_9^2. Значит, секретаря и его заместителя можно выбрать $A_9^2 = 9 \cdot 8 = 72$ способами.

Пример 16. Сколько хорд можно провести через 6 точек, лежащих на одной окружности?

Решение. Из множества, содержащего 6 различных элементов, выбираются 2 элемента, так как хорда однозначно определяется двумя точками, лежащими на окружности. Порядок элементов роли не играет. Например, [AB] и [BA] — одна и та же хорда. Следовательно, необходимо найти число сочетаний из шести элементов по два, т. е. C_6^2. Значит, можно провести $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$ различных хорд.

Пример 17. Даны натуральные числа от 1 до 30. Сколькими способами можно выбрать три числа так, чтобы их сумма была четной?

Решение. Сумма трех чисел будет четной, если все слагаемые четные или одно слагаемое четное и два слагаемых нечетные. Следовательно, из 15 четных чисел 3 числа можно выбрать C_{15}^3 различными способами, так как порядок слагаемых не учитывается. Кроме того, из 15 нечетных чисел 2 числа можно выбрать C_{15}^2 различными способами и после каждого такого выбора по одному четному числу из 15 можно выбрать C_{15}^1 способами. По правилу произведения число выборок, содержащих два нечетных и одно четное число, равно $C_{15}^2 C_{15}^1$. Применяя правило суммы, найдем общее число выборок, удовлетворяющих условию $C_{15}^3 + C_{15}^2 C_{15}^1 = 2030$.

Задачи

85. На железнодорожной станции имеются m светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: «красный», «желтый» и «зеленый»?

86. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором числа зубов. Какая может быть наибольшая численность населения государства, если полное число зубов у человека равно 32?

87. Сколько четырехзначных чисел можно образовать из нечетных цифр, если каждая из этих цифр может повторяться?

88. Сколькими способами можно распределить 12 различных учебников между четырьмя студентами?

89. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет разного достоинства?

90. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

91. Сколько «слов», каждое из которых состоит из семи различных букв, можно составить из букв слова *выборка*?

92. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков?

93. Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?

94. В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяются два ученика. Можно ли составить расписание дежурств так, чтобы никакие два ученика не дежурили вместе дважды в течение учебного года?

95. Сколькими способами можно переставлять буквы слова *логарифм* так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

96. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?

97. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать не более одного раза?

98. Сколько получится различных параллелограммов при пересечении n параллельных прямых m другими параллельными прямыми?

99. У одного человека имеется 7 книг, а у другого — 9. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги?

100. В состав сборной включены 2 вратаря, 5 защитников, 6 полузащитников и 6 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника и 3 нападающих?

101. Из полного набора шахмат вынули 4 фигуры или пешки. Во скольких случаях среди них окажется: а) два коня, б) не менее двух коней?

102. Сколькими способами можно выбрать из слова *логарифм* две согласных и одну гласную букву?

103. На прямой взяты m точек, а на параллельной ей прямой — n точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

104. Сколькими способами можно распределить поровну 12 различных учебников между четырьмя студентами?

105. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

106. Доказать, что число перестановок при $n > 1$ всегда является четным.

107. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

108. За круглым столом сидит n человек. Докажите, что число круговых перестановок равно $\frac{P_n}{n} = (n-1)!$

109. Сколько ожерелий из семи бусинок каждое можно составить из семи бусинок разных размеров?

§ 8. ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пусть дан кортеж длины n, составленный из элементов множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. Назовем составом этого кортежа новый кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, образованный из неотрицательных целых чисел, где x_1 входит в этот кортеж n_1 раз, ..., x_r — n_r раз.

Кортежи заданного состава $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ называют *перестановками с повторениями из n_1 элементов x_1, n_2 элементов x_2, ..., n_r элементов x_r*. Их число выражается формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}, \tag{11}$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Разобьем множество всех кортежей длины n, составленных из элементов множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ на классы эквивалентности, отнеся к одному классу кортежи одинакового состава. Эти классы эквивалентности называют *сочетаниями с повторениями из n элементов по r*. Их число выражается формулой

$$\tilde{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}. \tag{12}$$

Литература: [1], § 6, с. 31—32, § 7, с. 37—38.

Указания. При решении задач на перестановки и сочетания с повторениями рекомендуется:

1) выяснить, идет ли в задаче речь о подсчете числа кортежей данного состава или о подсчете числа возможных составов кортежей;

2) в первом случае найти состав кортежа и воспользоваться формулой (11);

3) во втором случае найти число n элементов основного множества, длину кортежа r и воспользоваться формулой (12).

Пример 18. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 слона, 2 коня, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

Решение. Рассматриваемые кортежи имеют длину 8 и состоят из элементов пяти видов. Состав кортежей имеет вид (2, 2, 2, 1, 1). Следовательно, число способов, которыми можно расставить 8 фигур на первой линии шахматной доски, равно

$$P_8(2, 2, 2, 1, 1) = \frac{8!}{2!\,2!\,2!\,1!\,1!} = 5040.$$

Пример 19. В цветочном магазине продаются цветы шести сортов. Сколько можно составить различных букетов из десяти цветов в каждом? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

Решение. Рассматриваемое множество состоит из шести различных элементов, а кортежи имеют длину 10. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то число букетов равно числу сочетаний с повторениями из шести элементов по десяти в каждом. Следовательно, можно составить $\tilde{C}_6^{10} = C_{15}^{10} = C_{15}^5 = 3003$ различных букетов.

Задачи

110. Сколько букв алфавита можно составить из пяти сигналов в каждой букве, если три сигнала — импульсы тока, а два — паузы?

111. Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?

112. Найдите число различных перестановок в слове *статистика*; в слове *парабола*.

113. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному плоду. Сколькими способами это может быть сделано?

114. Сколько четырехзначных чисел имеется в пятеричной системе счисления?

115. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из восьми открыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

116. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

117. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и две фабрики, где требуются мужчины и женщины?

118. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек (каждому из участников вручается только одна книга)?

119. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 8 и 9?

120. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найдите число таких номеров, если используются 24 буквы русского алфавита и 10 цифр (0, 1, ..., 9).

121. Сколькими способами можно переставить буквы слова *перешеек* так, чтобы 4 буквы «е» не стояли подряд?

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Исследование и решение задач на вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики проводится по схеме, помещенной во втором параграфе. Вычисление числа возможных исходов испытания n и числа исходов m, благоприятствующих рассматриваемому событию, осуществляется по схемам, помещенным в § 5—8.

Литература: [1], § 9, с. 39—42.

Пример 20. Группа туристов из пятнадцати юношей и пяти девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе четырех человек. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки?

Решение. Испытание состоит в том, что из двадцати человек выбирают 4 человека. Так как выбор осуществляется по жребию, то все исходы испытания равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число исходов испытания $n = C_{20}^4$, так как выборка состоит из четырех элементов и порядок их расположения в выборке не учитывается. Пусть событие A состоит в том, что в составе выбранных окажутся два юноши и две девушки. Двух юношей из 15 можно выбрать C_{15}^2 способами и после каждого такого выбора двух девушек из 5 можно выбрать C_5^2 способами. По правилу произведения событию A благоприятствует $C_{15}^2 C_5^2$ исходов испытания. Искомая вероятность вычисляется по формуле (1) § 2 и равна

$$p(A) = \frac{C_{15}^2 C_5^2}{C_{20}^4} \approx 0{,}217.$$

Пример 21. На книжной полке произвольно расставлены 4 книги по теории вероятностей и 3 книги по теории множеств. Какова вероятность того, что книги по одному и тому же предмету окажутся рядом?

Решение. Испытание состоит в том, что 7 книг ставятся на полку. Так как они ставятся на полку произвольно, то все исходы испытания равновероятны, кроме того, они несовместны. Семь книг на полке могут быть упорядочены 7! способами. Следовательно, число всех исходов испытания $n = 7!$. Событию A, состоящему в том, что книги по одному и тому же предмету окажутся рядом, благоприятствует $m = 2 \cdot 4! \cdot 3!$ исходов испытания. Действительно, комплект книг по теории вероятностей может быть упорядочен 4! способами, и после каждого такого расположения книги по теории множеств могут быть упорядочены 3! способами. Кроме того, сами комплекты книг могут быть упорядочены двумя способами. Таким образом, вероятность события A равна

$$p(A) = \frac{2 \cdot 4!\, 3!}{7!} \approx 0{,}057.$$

Задачи

122. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы A, $Г$, $И$, $Л$, $М$, $О$, $Р$, $Т$, получится слово *алгоритм*?

123. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы A, A, A, $Н$, $Н$, $С$, получится слово *ананас*?

124. Найдите вероятность того, что наудачу выбранное n-значное число составлено только из нечетных цифр.

125. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число не содержит ни одной двойки?

126. Отряд учащихся из 25 человек участвует в военизированной игре. В отряде 5 следопытов и 4 связиста. В разведку надо направить четырех человек. Какова вероятность того, что в разведгруппу будут включены 2 связиста и 2 следопыта, если включение в разведгруппу равновероятно для любого ученика?

127. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках, равна десяти?

128. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяются 5 человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 10 юношей и 2 девушки. Найдите вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки.

129. В коробке находятся 4 красных и 6 зеленых карандашей. Из нее случайно выпали 3 карандаша. Какова вероятность того, что два из них окажутся красными?

130. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 билета на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда?

131. Билет в партер стоит 50 коп., на бельэтаж — 40 коп. и на ярус — 30 коп. Найдите вероятность того, что взятые наудачу два билета стоят вместе не дороже 80 коп.

132. Из 60 вопросов, включенных в экзамен, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что из предложенных ему трех вопросов он знает два?

133. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживаются 7 учеников. Найдите вероятность того, что 3 определенных ученика окажутся рядом.

134. Из букв слова *событие*, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и складываются друг за другом в порядке их извлечения 3 карточки (буквы). Какова вероятность получить при этом слово *быт*?

135. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются 3 открытки. Какова вероятность того, что все отобранные открытки будут разные?

136. Во время спортивной игры по команде ведущего «становись!» 10 учеников в случайном порядке образовали строй в одну шеренгу. Какова вероятность того, что ученики A и B окажутся отделенными друг от друга тремя учениками?

137. Группа, состоящая из пяти юношей и семи девушек, распределяет по жребию 4 билета в театр. Какова вероятность того, что в числе получивших билеты окажется больше девушек, чем юношей?

138. В одном ящике имеется 12 однотипных деталей, из которых 4 нестандартные, в другом 15 деталей и 3 из них нестандартные. Из каждого ящика наудачу извлекается по 2 детали. Найдите вероятность того, что из первого ящика извлекли 2 нестандартные, а из второго ящика — 2 стандартные детали.

139. Из урны, содержащей 9 белых, 9 черных, 9 синих и 9 красных шаров, наудачу извлекаются 3 шара. Какова вероятность того, что извлеченными окажутся белые или черные шары?

140. Из полного набора костей домино наудачу отобрали 4 кости, после чего кости возвратили в игру. Затем наудачу снова отобрали 4 кости. Какова вероятность того, что среди отобранных первый раз костей было 3 «дубля», а среди отобранных второй раз — только 2?

§ 10. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ, ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ, ТЕОРЕМА БАЙЕСА

Обозначим через $p(B/A)$ *условную вероятность* события B при условии, что событие A произошло. По определению

$$p(B/A) = \frac{p(AB)}{p(A)}. \tag{13}$$

Отсюда

$$p(AB) = p(A)\, p(B/A). \tag{14}$$

Если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместные события, объединение которых совпадает с пространством элементарных событий проводимого испытания, и A — случайное событие из этого пространства, то имеет место следующая *формула полной вероятности:*

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A/H_i). \tag{15}$$

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(A) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое *формулой Байеса*:

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i)\, p(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A/H_i)} = \frac{p(H_i)\, p(A/H_i)}{p(A)}. \qquad (16)$$

Литература: [1], § 11—14, с. 45—57.

Указание. При вычислении вероятности рассматриваемого события по формуле полной вероятности необходимо:

1. Уяснить последовательность испытаний, рассматриваемых в задаче.

2. Обозначить событие, вероятность наступления которого надо найти какой-нибудь буквой, например A.

3. Составить множество попарно несовместных гипотез H_1, H_2, ..., H_n. Проверить, что объединение гипотез совпадает с пространством элементарных событий проводимого испытания.

4. Вычислить вероятности каждой из гипотез и условные вероятности наступления события A при условии, что произошло событие H_i $(i = 1, 2, ..., n)$ (если они не даны в условии задачи).

5. По формуле (15) вычислить вероятность события A. Если из условия задачи известно, что событие A уже произошло, то по формуле Байеса необходимо вычислить вероятности гипотез при условии, что событие A произошло.

Примечание. Решение задач на вычисление вероятностей произведения зависимых событий можно осуществлять по схеме, рассмотренной в § 4.

Пример 22. Ученик 2 раза извлекает по одному билету из 34, предлагаемых на экзамене. Какова вероятность того, что ученик сдаст экзамен, если он подготовил только 30 билетов и первый раз вынул неудачный билет?

Решение. Испытание состоит в том, что два раза наудачу извлекаются по одному билету, причем вынутый первый раз билет назад не возвращается.

Пусть событие A заключается в том, что первый раз вынут «неудачный» билет, а событие B — в том, что второй раз вынут «удачный» билет. Требуется вычислить вероятность события AB, состоящего в том, что первый раз был вынут «неудачный» билет, а второй раз — «удачный». События A и B зависимые, так как вынутый первый раз билет не возвращается в число всех билетов. Поэтому $p(AB) = p(A)\, p(B/A)$. Из условия задачи находим: $p(A) = \frac{4}{34}$. Если событие A произошло, то на столе экзаменатора осталось 33 билета, из которых 30 «удачных». Следовательно, $p(B/A) = \frac{30}{33}$ и искомая вероятность

$$p(AB) = \frac{4}{34} \cdot \frac{30}{33} \approx 0{,}107.$$

Пример 23. Имеются три партии радиоламп, насчитывающих соответственно 20, 30 и 50 штук. Вероятности того, что радиолампа проработает заданное время, равны соответственно для этих партий 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа из ста данных проработает заданное время?

Решение. Испытание состоит в том, что наудачу извлекается одна лампочка из 100 ламп. Событие A, вероятность которого надо вычислить, состоит в том, что извлеченная лампа проработает заданное время. Пусть гипотезы H_1, H_2, H_3 означают соответственно, что наудачу выбранная радиолампа принадлежит первой, второй, третьей партии. По формуле (1) $p(H_1) = 0{,}2$, $p(H_2) = 0{,}3$ и $p(H_3) = 0{,}5$.

По условию задачи $p(A/H_1) = 0{,}7$, $p(A/H_2) = 0{,}8$, $p(A/H_3) = 0{,}9$.

По формуле полной вероятности находим вероятность события A, которая равна

$$p(A) = p(H_1)\,p(A/H_1) + p(H_2)\,p(A/H_2) + p(H_3)\,p(A/H_3) = 0{,}83.$$

Пример 24. В условие предыдущего примера внесено изменение: считается известным, что наудачу выбранная радиолампа проработала заданное время. Какова вероятность того, что эта радиолампа принадлежит первой партии?

Решение. Из условия задачи известно, что наудачу выбранная радиолампа проработала заданное время, т. е. событие A уже произошло. После получения этой дополнительной информации нам надо определить, как изменилась вероятность гипотез. Требуется вычислить вероятность гипотезы H_1 при условии, что событие A произошло. По формуле Байеса

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1)\,p(A/H_1)}{p(A)} \approx 0{,}169,$$

т. е. вероятность того, что лампочка принадлежит первой партии, после опыта уменьшилась и стала равной 0,169.

Задачи

141. Ученик забыл последнюю цифру даты Куликовской битвы и поэтому называет ее наудачу. Определить вероятность того, что до правильного ответа ему придется отвечать не более трех раз.

142. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и одной задаче. Всего составлено 28 билетов, содержащих разные вопросы и задачи. Студент подготовил только 50 теоретических вопросов и сможет решить задачи к 22 билетам. Какова вероятность того, что, вынув наудачу один билет, студент ответит на все вопросы?

143. Буквы слова *задача* написаны на одинаковых карточках. Наудачу по одной последовательно извлекаются 4 карточки без возвращения их в игру. Какова вероятность того, что при этом получится слово *дача*?

144. В коробке имеются 2 красных, 3 синих и 2 зеленых карандаша. Из нее наудачу без возвращения вынимают один за другим по одному карандашу. Найти вероятность того, что красный карандаш появится раньше синего.

145. Вероятность сдачи студентом зачета равна 0,8. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна 0,9. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет и экзамен?

146. Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,8. Если стрелок попадает в цель при первом выстреле, то ему предоставляется право стрелять во вторую цель. Вероятность поражения обеих целей этим стрелком равна 0,6. Какова вероятность поражения стрелком второй цели?

147. Студент держит экзамен, состоящий в установлении истинности или ложности пяти утверждений. Какова вероятность правильного ответа на все вопросы, если студент:

а) просто угадывает ответ;

б) знает, что преподаватель всегда дает больше истинных утверждений, чем ложных;

в) знает, что преподаватель никогда не дает подряд трех вопросов, требующих одинакового ответа;

г) знает, что, кроме того, ответы на первый и последний вопросы противоположны;

д) знает еще, что «ложно» — ответ на второй вопрос?

148. Студент знает ответы на 15 экзаменационных билетов из 20. В каком случае он имеет большую вероятность сдать экзамен, если он идет отвечать первым или если — вторым?

149. Из группы, состоящей из четырех юношей возраста 17, 18, 19 и 20 лет и четырех девушек тех же лет, наугад выбирают двух человек. Какова вероятность того, что:

а) оба выбранных окажутся юношами;

б) оба окажутся юношами, если известно, что один из выбранных юноша;

в) оба окажутся юношами, если известно, что один из них юноша, которому не более 18 лет;

г) оба окажутся юношами, если известно, что один из них юноша 17 лет?

150. Имеются 2 одинаковые урны, первая из которых содержит 2 черных и 3 белых шара, а вторая — 2 черных и 1 белый шар. Сначала наугад выбирается одна урна, а потом из нее извлекается наугад один шар. Какова вероятность того, что будет выбран белый шар? Решите ту же задачу, исходя из условия, что обе урны содержат по два белых и два черных шара.

151. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй — только белые и в третьей — только черные. Наудачу выбирается урна и из нее наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар черный?

152. Из полного набора костей домино наудачу выбрана одна кость, которая в игру не возвращается. Какова вероятность того, что наудачу выбранную вторую кость можно приставить к первой?

153. Ученик пришел на экзамен, зная 25 билетов из 30. Перед ним был взят только один билет. Какова вероятность того, что ученик знает наудачу вытянутый билет?

154. На карточках написаны буквы, образующие слово *комбинаторика*, но две карточки из этого набора утеряны. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что на ней окажется гласная буква?

155. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, а во второй — 6 белых и 4 черных. Наудачу выбирается урна и из нее наугад вынимается один шар. Выбранный шар оказался белым. Какова вероятность того, что этот шар вынут из первой урны?

156. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая кольца на колышек. Для пяти из них вероятность попадания кольца на колышек равна 0,6, для трех других — 0,5 и для остальных — 0,3. Кольцо, брошенное одним из юношей, попало на колышек. Какова вероятность того, что это кольцо было брошено юношей из первой группы?

157. В одной студенческой группе обучаются 24 студента, во второй — 36 студентов и в третьей — 40 студентов. По математическому анализу получили отличные отметки 6 студентов первой группы, 6 студентов второй группы и 4 студента третьей группы. Наугад выбранный студент оказался получившим по математическому анализу отметку «отлично». Какова вероятность того, что он учится в первой группе?

158. Преподаватель экзаменует незнакомую ему группу по экзаменационным билетам, содержащим по три вопроса. Он знает, что в предыдущую сессию в этой группе было 27 успевающих студентов, из них шесть отличников, и трое неуспевающих студентов, и считает, что отличники ответят на все три вопроса с вероятностью 80%, остальные успевающие студенты — с вероятностью 60% и неуспевающие — с вероятностью 20%. Вызванный студент ответил на все три вопроса билета. Какова вероятность того, что он: а) отличник; б) успевающий студент; в) неуспевающий студент?

159. Для сдачи зачета студентам необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили ответы на все вопросы, 8 — на 25 вопросов, 5 — на 20 вопросов и двое — на 15. Вызванный наудачу студент ответил на поставленный ему вопрос. Найдите вероятность того, что этот студент: а) подготовил все вопросы; б) подготовил только половину вопросов.

160. Имеются 3 одинаковые урны. В первой находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй — 7 белых и 3 черных и в третьей — только черные. Наудачу выбирается урна и из нее наугад вынимается один шар. Выбранный наудачу шар оказался черным. Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны?

161. В классе обучаются 20 девочек и 10 мальчиков. К уроку не выполнили домашнее задание 4 девочки и 3 мальчика. Наудачу вызванный ученик оказался неподготовленным к уроку. Какова вероятность того, что отвечать был вызван мальчик?

§ 11. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ С ДВУМЯ ИСХОДАМИ

1. *Формула Бернулли.* Вероятность того, что событие A наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода (обозначается $P_n(m)$ или $p_{n,\,m}$), вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m = 0, 1, 2, ..., n, \tag{17}$$

где p — вероятность наступления события A в каждом испытании.

2. Вероятность наступления события A хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна

$$P_n(m \geqslant 1) = 1 - q^n, \tag{18}$$

где $q = 1 - p$.

3. Вероятность того, что событие A при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз вычисляется по формуле

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(m). \tag{19}$$

4. Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события A при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p,$$

$$np - (1-p) \leqslant m_0 \leqslant mp + p. \tag{20}$$

Литература: [1], § 15—16, с. 58—65.

Указания. При решении задач данного параграфа необходимо установить, что рассматриваемый эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли, т. е. необходимо проверить, что:

1) проводимые испытания независимы,

2) каждое испытание имеет два исхода,

3) вероятность появления события в каждом испытании постоянна и равна p.

После этого необходимо ввести соответствующее обозначение события, вероятность наступления которого надо вычислить, и выбрать нужную формулу.

Пример 25. Вероятность выигрыша по одному билету денежно-вещевой лотереи равна 0,2. Какова вероятность того, что из шести приобретенных билетов два билета окажутся выигрышными?

Решение. Эксперимент состоит в том, что последовательно проверяются 6 билетов, т. е. проводится 6 повторных независимых испытаний. Каждое испытание имеет два исхода: билет выигрышный, билет невыигрышный. Вероятность выигрыша в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие $(m=2)$ состоит в том, что 2 билета оказались выигрышными. Тогда по формуле Бернулли:

$$P_6\ (m = 2) = C_6^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 \approx 0{,}246.$$

Пример 26. Прибор состоит из шести элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время t равна 0,6. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время t прибор будет работать безотказно?

Решение. Эксперимент заключается в проведении шести повторных независимых испытаний с двумя исходами каждый. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна $q = 0{,}4$. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие $(m \geqslant 1)$ означает, что хотя бы один элемент прибора исправен. Тогда по формуле (18) вероятность наступления рассматриваемого события равна

$$P_6\ (m \geqslant 1) = 1 - 0{,}4^6 \approx 0{,}9959.$$

Пример 27. Используя условия предыдущего примера, найдите число элементов, которые необходимо включить в прибор, чтобы с вероятностью не менее 0,9 прибор работал безотказно.

Решение. Так как в задаче требуется, чтобы выполнялось условие $P_n\,(m \geqslant 1) \geqslant 0{,}9$, то имеем $1 - 0{,}4^n \geqslant 0{,}9$. Отсюда $0{,}4^n \leqslant 0{,}1$. Прологарифмируем это неравенство, тогда $n \lg 0{,}4 \leqslant \lg 0{,}1$. Так как $\lg 0{,}4 < 0$, то

$$n \geqslant \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}4} \approx 2{,}5.$$

Значит, в приборе должно быть не менее трех элементов для того, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он работал безотказно.

Пример 28. Найдите вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение. Эксперимент заключается в проведении пяти повторных испытаний, независимых, с двумя исходами в каждом (разговор состоялся, разговор не состоялся). Вероятность того, что разговор состоится, в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие $(2 \leqslant m \leqslant 4)$

означает, что состоялось от двух до четырех разговоров. Тогда по формуле (19) имеем:

$$P_5(2 \leqslant m \leqslant 4) = C_5^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3 + C_5^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^2 + C_5^4 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 \approx \approx 0{,}801.$$

Пример 29. Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найдите наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

Решение. Проводится 50 повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом. Вероятность появления нестандартной детали в каждом испытании постоянна. Значит, схема Бернулли выполняется. По формуле (20) имеем:

$$50 \cdot 0{,}05 - 0{,}95 \leqslant m_0 \leqslant 50 \cdot 0{,}05 + 0{,}05,$$

$$1{,}55 \leqslant m_0 \leqslant 2{,}55.$$

Так как число деталей может быть только целым, то наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии равно 2.

Задачи

162. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми?

163. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна p. Найдите вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

164. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

165. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

166. Вероятность того, что стрелок попадает в цель при одном выстреле, равна 0,7. Производится 5 независимых выстрелов. Какова вероятность того, что в мишени окажется хотя бы одна пробоина?

167. В горном районе создано n автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью p. Какова вероятность того, что в течение года хотя бы одна станция потребует ремонта?

168. Вероятность появления события A хотя бы один раз при пяти независимых испытаниях равна 0,99757. Какова постоянная вероятность появления этого события при одном испытании?

169. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Из большой партии (независимо друг от друга) производится случайная выборка радиоламп. Сколько ламп надо взять, чтобы с вероятностью не менее 0,9 была извлечена хотя бы одна нестандартная лампа?

170. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,2. Сколько надо произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,99 в мишени была хотя бы одна пробоина?

171. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживаются. Найдите вероятность того, что из десяти посаженных кустов помидоров приживется не менее девяти.

172. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос приведено 5 ответов, один из которых правильный. Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан: а) на 3 вопроса, б) не менее чем на 3 вопроса?

173. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,85. Стрелок сделал 25 независимых выстрелов. Найдите наивероятнейшее число попаданий.

174. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии пшеницы 0,95. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?

175. Произведено 400 независимых испытаний. Какова должна быть вероятность появления события A в каждом испытании (вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же), чтобы наиболее вероятное число появления события A при этом равнялось 150?

176. Какова вероятность получения не менее 70% правильных ответов при простом отгадывании на экзамене, состоящем в определении истинности или ложности десяти утверждений?

177. Контрольная работа состоит из шести задач, причем для успешного выполнения ее необходимо решить любые четыре задачи. Если студент будет решать в течение отведенного времени лишь четыре задачи, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,8. Если он попробует решить пять задач, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,7, а если он возьмется за решение всех шести задач, то эта вероятность снизится до 0,6. Какой тактики должен придерживаться студент, чтобы иметь наибольшие шансы успешно выполнить работу?

§ 12. ТЕОРЕМЫ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Из *локальной предельной теоремы Лапласа* следует приближенная формула

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{21}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Из *интегральной теоремы Лапласа* следует приближенная формула

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad (22)$$

где $t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

Для вычислений по формуле (22) пользуются специальными таблицами функции Лапласа (см. Приложение 1)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (23)$$

Эта функция нечетна, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Формула (22) может быть записана с помощью этой функции следующим образом:

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1) \cdot \qquad (24)$$

Из *предельной теоремы Пуассона* следует приближенная формула

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ причем } np = \lambda. \qquad (25)$$

Формулы Бернулли, Лапласа и Пуассона применяются в тех случаях, когда рассматриваются испытания, удовлетворяющие схеме Бернулли. При этом важно правильно выбрать соответствующую формулу: (17), (19), (21), (24) или (25).

Литература: [1], § 17—19, с. 66—78.

Указания. При выборе формулы можно руководствоваться следующим:

1. Если число независимых испытаний n мало, то для вычисления вероятности появления события m раз пользуются формулой Бернулли (17). В этом случае не возникает вычислительных трудностей для подсчета $P_n(m)$.

2. Если число независимых испытаний n мало и требуется найти вероятность появления события от m_1 до m_2 раз, то для вычисления $P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2)$ применяют формулу (19).

3. Если число независимых испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании отлична от 0 и 1, то для вычисления $P_n(m)$ применяют формулу Лапласа (21).

4. Если число независимых испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании мала, то для вычисления $P_n(m)$ применяют формулу Пуассона (25).

5. Если число независимых испытаний n достаточно велико, то для вычисления вероятности появления события от m_1 до m_2 раз:

а) при малом числе слагаемых в сумме $\sum_{m_i=m_1}^{m_2} P_n(m_i)$ и вероятности появления события в каждом испытании, отличной от 0 и 1, можно применить формулы (19) и (21):

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \sum_{m_i=m_1}^{m_2} P_n(m_i) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{m_i=m_1}^{m_2} \varphi\left(\frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}\right); \qquad (26)$$

б) при малом числе слагаемых в сумме $\sum_{m_i=m_1}^{m_2} P_n(m_i)$ и малой вероятности появления события в каждом испытании можно применить формулы (19) и (25):

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \sum_{m_i=m_1}^{m_2} P_n(m_i) \approx e^{-\lambda} \sum_{m_i=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!}, \qquad (27)$$

где $np = \lambda$;

в) при достаточно большом числе слагаемых применяется интегральная теорема Лапласа (24).

Пример 30. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий 530 будут первого сорта.

Решение. Эксперимент заключается в проведении 600 повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом. Вероятность появления изделия первого сорта в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли применима.

По условию задачи $n = 600$, $m = 530$, $p = 0,9$. Так как n достаточно велико, а p и $1 - p$ не малы, то для вычисления вероятности того, что событие A (взятая деталь оказалась первого сорта) появилось 530 раз, можно использовать формулу (21). При этом вычисления осуществляются в следующем порядке:

1) Вначале вычислим

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx 0,136.$$

2) Затем находим

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = (530 - 540) \cdot 0,136 = -1,36.$$

3) В силу четности функции $\varphi(x)$ имеем $\varphi(-1,36) = \varphi(1,36)$.

4) По таблице значений $\varphi(x)$ находим $\varphi(1,36) = 0,1582$.

5) Следовательно, $P_{600}(530) \approx 0,136 \cdot 0,1582 \approx 0,021$.

Пример 31. С базы в магазин отправлено 4000 тщательно упакованных доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0,0005. Найдите вероятность того, что в магазин прибудут 3 испорченных изделия.

Решение. Испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. По условию задачи $n = 4000$, $m = 3$, $p = 0{,}0005$. Так как n достаточно велико, а $p = 0{,}0005$ сравнительно мало, то для вычисления $P_{4000}(3)$ можно воспользоваться теоремой Пуассона. Сначала вычислим: $\lambda = np = 2$. Тогда по формуле (25) $P_{4000}(3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0{,}1804$.

Пример 32. В условиях примера 30 найдите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий от 530 до 532 изделий (включительно) будут первого сорта.

Решение. По условию задачи $n = 600$, $m_1 = 530$, $m_2=532$, $p = 0{,}9$. Так как для вычисления $P_n(m)$ можно использовать формулу Лапласа, а число слагаемых в сумме $\sum\limits_{m_i=m_1}^{m_2} P_n(m_i)$ равно трем, то для вычисления $P_{600}(530 \leqslant m \leqslant 532)$ можно использовать формулу (26).

$$P_{600}(530 \leqslant m \leqslant 532) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \sum_{m_i=530}^{532} \varphi\left(\frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

1) Вначале вычислим: $\frac{1}{\sqrt{npq}} \approx 0{,}136$.

2) Затем находим: $x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}}$, где $i = 1, 2, 3$,

при $m_1 = 530$ $\quad x_1 = (530 - 540) \cdot 0{,}136 = -1{,}36$,
при $m_2 = 531$ $\quad x_2 = (531 - 540) \cdot 0{,}136 = -1{,}22$,
при $m_3 = 532$ $\quad x_3 = (532 - 540) \cdot 0{,}136 = -1{,}09$.

3) В силу четности функции $\varphi(x)$ имеем:

$$\varphi(x_1) = \varphi(1{,}36),\ \varphi(x_2) = \varphi(1{,}22),\ \varphi(x_3) = \varphi(1{,}09).$$

4) По таблице значений $\varphi(x)$ находим:

$$\varphi(x_1) = 0{,}1582,\ \varphi(x_2) = 0{,}1895,\ \varphi(x_3) = 0{,}2396.$$

5) Следовательно,

$$P_{600}(530 \leqslant m \leqslant 532) \approx 0{,}136\,(0{,}1582 + 0{,}1895 + 0{,}2396) = 0{,}08.$$

Пример 33. В условиях примера 30 найдите вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий от 520 до 535 изделий (включительно) будут изделиями первого сорта.

Решение. По условию задачи $n = 600$, $m_1 = 520$, $m_2 = 535$, $p = 0{,}9$. Так как число независимых испытаний достаточно велико и число слагаемых в сумме $\sum\limits_{m_i=m_1}^{m_2} P_n(m_i)$ равно шестнадцати, то для вычисления P_{600} $(520 \leqslant m \leqslant 535)$ можно использовать интегральную теорему Лапласа. По формуле (24):

$$P_{600}(520 \leqslant m \leqslant 535) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где $t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

1) Вначале вычислим:

$$t_1 = \frac{520 - 540}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -2,72, \quad t_2 = \frac{535 - 540}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -0,68.$$

2) По таблице значений функции Лапласа, учитывая ее нечетность, находим: $\Phi(t_1)$ и $\Phi(t_2)$:

$$\Phi(t_1) = \Phi(-2,72) = -\Phi(2,72) = -0,4967,$$
$$\Phi(t_2) = \Phi(-0,68) = -\Phi(0,68) = -0,2517.$$

3) Следовательно,

$$P_{600}(520 \leqslant m \leqslant 535) \approx -0,2517 + 0,4967 = 0,2450.$$

Пример 34. Используя условия примера 31, найдите вероятность того, что в магазин прибудет от 3 до 5 испорченных изделий.

Решение. По условию задачи $n = 4000$, $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $p = 0,0005$ и $\lambda = np = 2$. Так как для вычисления $P_n(m)$ можно использовать формулу Пуассона, а число слагаемых в сумме $\sum\limits_{m_i=m_1}^{m_2} P_n(m_i)$ равно трем, то для вычисления $P_{4000}(3 \leqslant m \leqslant 5)$ можно использовать формулу (27)

$$P_{4000}(3 \leqslant m \leqslant 5) \approx e^{-2}\left(\frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}\right) = 0,3068.$$

Задачи

178. Найдите вероятность того, что при десяти независимых испытаниях событие A произойдет 4 раза, если вероятность его появления при каждом испытании равна $\frac{1}{3}$. Вычисление выполните, используя теорему Бернулли и локальную теорему Лапласа. Найдите относительную ошибку полученного результата. Объясните, почему эта ошибка велика.

179. Какова вероятность того, что при 80 бросаниях игральной кости шестерка выпадет 10 раз?

180. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Что вероятнее: отказ четырех приборов при испытании 20 или отказ шести приборов при испытании 30, если приборы испытываются независимо друг от друга?

181. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии превысит суточную норму, равна 0,2. Какова вероятность того, что за 25 рабочих дней будет зафиксирован перерасход электроэнергии: а) в течение пяти дней, б) от пяти до семи дней включительно?

182. Какова вероятность того, что при 80 бросаниях игральной кости пятерка выпадет от 10 до 20 раз включительно?

183. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,1. Найдите вероятность того, что среди них окажется от 100 до 120 деталей с личным клеймом.

184. Электростанция обслуживает сеть с 6000 лампочек, вероятность включения каждой из которых за время t равна 0,8. Найдите вероятность того, что одновременно будет включено не менее 4750 ламп.

185. Вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,02. Какова вероятность того, что из 100 билетов выигрыш выпадет: а) на два билета, б) хотя бы на один билет, в) на два или три билета?

186. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,005. Найдите вероятность того, что из 600 проверяемых изделий не выдержат испытания более двух изделий.

187. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,0025. Проверяется книга, содержащая 800 страниц. Найдите вероятность того, что с опечатками окажется: а) 5 страниц, б) от трех до пяти страниц.

188. С торговой базы в магазин отправлено n доброкачественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна p, причем n велико, а p мало. Известно, что вероятность получения магазином четырех изделий, получивших дефекты, равна вероятности получения магазином пяти изделий с дефектами. Найдите вероятность того, что магазин получит семь изделий с дефектами.

189. Из полного набора костей домино наудачу 75 раз извлекают по одной кости, причем после каждого извлечения кость возвращается в игру. Какова вероятность того, что при этом «дубль» появится 25 раз?

ГЛАВА II
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайная величина X — это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Множество значений этой функции $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называют *множеством возможных значений* случайной величины.

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются *дискретными*. *Непрерывные* случайные величины принимают возможные значения из некоторого промежутка.

Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности.

Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют *распределением вероятностей случайной величины*. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть задано в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Приведем распределение вероятностей некоторых дискретных величин:

1. *Равномерное распределение* вероятностей случайной величины X, принимающей n значений, задается формулой

$$P_n(X = x_i) = \frac{1}{n}, \tag{28}$$

где $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — все возможные значения случайной величины.

2. *Биномиальное распределение* вероятностей случайной величины X, значениями которой являются возможные значения числа m появления события A при проведении n повторных независимых испытаний, задается формулой

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{29}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

3. *Гипергеометрическое распределение* вероятностей случайной величины X задается формулой

$$P_n(X = m) = \frac{C_s^m \cdot C_{n-s}^{k-m}}{C_n^k}. \qquad (30)$$

Здесь n — число различных элементов множества M, из которых s элементов обладают определенным свойством; k — число элементов выборки, а m — число элементов, обладающих этим же свойством и оказавшихся в выборке, причем m может принимать следующие значения: $m = 0, 1, 2, \ldots, s$, если $s \leqslant k$.

4. *Геометрическое распределение* вероятностей случайной величины X, значениями которой являются возможные значения числа m проведенных испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли (причем опыт прекращается после первого же испытания, в котором рассматриваемое событие появилось), задается формулой

$$P_n(X = m) = pq^{m-1}, \qquad (31)$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$.

5. *Распределение Пуассона* задается формулой

$$P_n(X = m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}, \qquad (32)$$

где $m = 0, 1, 2 \ldots$.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — значения случайной величины X, а $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — значения случайной величины Y, то двумерная величина (X, Y) считается заданной, если указаны вероятности r_{ij} для каждой пары (x_i, y_j). Если p_i — вероятность значения x_i, а q_j — вероятность значения y_j, то справедливы формулы

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \quad \text{и} \quad q_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}.$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любых i и j имеем $r_{ij} = p_i q_j$.

Если X — случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то через $f(X)$ обозначают случайную величину, принимающую значения $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, причем если, например, $f(x_i) = f(x_j)$, то соответствующее значение берется лишь один раз. Вероятность значения $f(x_i)$ равна $\sum p_k$, где сумма берется по всем k таким, что $f(x_k) = f(x_i)$.

Аналогично определяются функции от нескольких случайных величин. Например, *суммой случайных величин* X и Y называют случайную величину $Z = X + Y$, значения которой равны различным числам $x_i + y_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, а вероятность значения z_k равна $\sum r_{ij}$, где суммирование ведется по всем парам (i, j), для которых $x_i + y_j = z_k$. Если величины X и Y независимы, то

$$P(Z = z_k) = \sum_{x_i + y_j = z_k} P(X = x_i)\, P(Y = y_j).$$

Точно так же определяется произведение двух случайных величин.

Литература: [1], § 20—21, с. 79—84.

Указания. Анализ и решение задач, в которых требуется составить таблицу распределения вероятностей случайной величины, рекомендуется делать по следующей схеме:

1. Установите, что является случайной величиной в рассматриваемой задаче.
2. Перечислите все возможные значения случайной величины.
3. Из условия задачи установите закон распределения вероятностей случайной величины.
4. Используя соответствующую формулу, найдите вероятности появления возможных значений случайной величины.
5. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины и проверьте, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пример 35. Составьте таблицу распределения вероятностей числа попаданий в мишень при трех независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2.

Решение. Случайная величина X есть число попаданий в мишень. Так как производятся три независимых выстрела, то случайная величина может принимать следующие значения: $x_1=0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, поскольку испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. По формуле $P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m = 0, 1, 2, 3$, находим: $P(X = 0) = 0{,}512$, $P(X = 1) = 0{,}384$, $P(X = 2) = 0{,}096$, $P(X = 3) = 0{,}008$.

Таким образом, получаем следующую таблицу распределения вероятностей случайной величины X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

Проверка:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}096 + 0{,}008 = 1.$$

Пример 36. Независимые случайные величины X и Y заданы таблицами распределения вероятностей:

x_i	1	2
p_i	0,4	0,6

y_j	3	4
q_j	0,8	0,2

Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Возможные значения случайной величины Z равны $z_1 = 4$; $z_2 = 5$; $z_3 = 6$.

$$P(z = 4) = P(X = 1)\,P(Y = 3) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32;$$

$$P(Z = 5) = P(X = 2)\,P(Y = 3) + P(X = 1)\,P(Y = 4) = 0,56;$$

$$P(Z = 6) = P(X = 2)\,P(Y = 4) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12.$$

Полученные значения запишем в таблицу:

z_k	4	5	6
p_k	0,32	0,56	0,12

Задачи

190. Какие из перечисленных ниже случайных величин являются дискретными:

1) число попаданий в мишень при десяти независимых выстрелах;

2) отклонение размера обрабатываемой детали от стандарта;

3) число нестандартных изделий, оказавшихся в партии из 100 изделий;

4) число очков, выпавших на верхней грани при одном подбрасывании игрального кубика?

191. Перечислите все возможные значения случайной величины X, являющейся числом отличных оценок на экзамене в группе, состоящей из 25 студентов.

192. Какие возможные значения может принимать случайная величина Y, означающая число образцов сплавов, используемых при испытании до первого разрушения или до полного израсходования всех образцов, если их имеется 6 штук?

193. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число появления герба: а) при одном подбрасывании монеты; б) при десяти подбрасываниях монеты?

194. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 карандаша красные. Наудачу извлекаются 3 карандаша. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?

195. Монета подбрасывается 4 раза. Для случайного числа появления герба составьте таблицу и постройте многоугольник распределения вероятностей.

196. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавших на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

197. По одному и тому же маршруту в один и тот же день совершают полет 3 самолета. Каждый самолет с вероятностью 0,7 может произвести посадку по расписанию. Для случайного числа самолетов, отклонившихся от расписания, составьте таблицу распределения вероятностей.

198. Участник игры в лапту 5 раз бьет по мячу. Вероятность попадания в мяч лаптой при каждом ударе одинакова и равна p. Составьте таблицу распределения вероятностей числа попаданий в мяч. Используя таблицу, покажите, что $P\ (2 \leqslant X \leqslant 3) = 10p^2q^2$, где $q = 1 - p$.

199. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекают 3 работы. Составьте таблицу распределения числа работ, оцененных на «отлично» и оказавшихся в выборке.

200. Набрасываются кольца на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9. Используя полученную таблицу, найдите $P\ (X < 4)$.

201. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,5. Стрелок, имея в запасе 6 патронов, ведет огонь по мишени до первого попадания или до полного израсходования всех патронов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа израсходованных патронов.

202. Имеются 6 билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут 3 билета. Составьте таблицу распределения вероятностей числа билетов первого ряда, оказавшихся в выборке. Используя полученную таблицу, найдите $P\ (X < 3)$.

203. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа страниц с опечатками, если проверяемая книга насчитывает 800 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,0025.

204. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа изделий, выдержавших испытание, если испытываются 600 деталей, а вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0,005.

205. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения вероятностей:

x_i	-3	3	4
p_i	0,3	0,5	0,2

Составьте таблицу распределения вероятностей случайных величин $Y = X^2$, $Z = 3X$.

206. Случайная величина X принимает натуральные значения, причем значение n с вероятностью $\frac{1}{2^n}$. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины $Y = \sin\frac{\pi X}{2}$.

207. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины $Z = XY$, если X и Y — независимые случайные величины, заданные таблицами распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$

y_i	0	1
q_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

208. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины $Z = X + Y$, если X и Y — независимые случайные величины, заданные таблицами распределения:

x_i	5	6
p_i	0,6	0,4

y_i	0	1
q_i	0,2	0,8

209. Составьте таблицы распределения вероятностей для случайных величин $Z_1 = X + Y$ и $Z_2 = XY$, если X и Y — независимые случайные величины, заданные таблицами распределения:

x_i	0	5	10
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

y_i	0	2	4	6
q_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \tag{33}$$

причем ряд, стоящий в первой части этого равенства, предполагается абсолютно сходящимся. Помимо обозначения математического ожидания $M(X)$, применяется также обозначение m.

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M(X - M(X))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i; \tag{34}$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{35}$$

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{36}$$

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(X) = np, \; D(X) = npq. \tag{36'}$$

Если случайная величина X имеет геометрическое распределение вероятностей, то

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}. \tag{36''}$$

Если случайная величина X имеет пуассоновское распределение вероятностей, то

$$M(X) = \lambda, \; D(X) = \lambda. \tag{36'''}$$

Если в задаче случайная величина задана таблицей распределения вероятностей, то для вычисления ее числовых характеристик надо использовать формулы (33—36).

Если в задаче таблица распределения вероятностей не дана, но из условия задачи можно установить закон распределения вероятностей, то для вычисления числовых характеристик случайной величины можно применять формулы (36'—36''').

Отметим некоторые свойства математического ожидания и дисперсии:

1. *Математическое ожидание линейной комбинации случайных величин равно соответствующей линейной комбинации их математических ожиданий:*

$$M(C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n) = C_1M(X_1) + C_2M(X_2) + \\ + \ldots + C_nM(X_n),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — *постоянные.*

2. *Если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению математических ожиданий множителей:*

$$M(XY) = M(X)\,M(Y).$$

3. *Математическое ожидание функции $Y = f(X)$ от случайной величины X выражается формулой*

$$M(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, p_i,$$

где p_i — вероятность значения x_i.

4. *Если X — случайная величина, а C — постоянная, то*

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

и

$$D(X + C) = D(X).$$

5. *Если случайные величины X и Y независимы, то*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Из свойств 4 и 5 вытекает, что если случайные величины X_1, X_2, ..., X_n независимы, а C_1, C_2, ..., C_n — постоянные, то

$$D(C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_n X_n) = C_1^2 D(X_1) + C_2^2 D(X_2) + \\ + \ldots + C_n^2 D(X_n).$$

Литература: [1], § 31, с. 125—128, § 33, с. 139—143.

Пример 37. Случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей:

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Найдем $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Так как известна таблица распределения вероятностей, то по формуле (33)

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}2 = 6{,}4.$$

Для вычисления $D(X)$ найдем сначала $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}4 + 64 \cdot 0{,}3 + 81 \cdot 0{,}2 = 45{,}8.$$

По формуле (35)

$$D(X) = 45{,}8 - 6{,}4^2 = 4{,}84.$$

И, наконец, по формуле (36)

$$\sigma(X) = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2.$$

Пример 38. Найдем математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение. Пусть X — число лотерейных билетов, на которые выпали выигрыши. Случайная величина X имеет биномиальное распределение, так как испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. Поэтому

$$M(X) = 100 \cdot 0{,}05 = 5,$$
$$D(X) = 100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 4{,}75.$$

Пример 39. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по одной цели. Вероятность попадания первого стрелка в цель равна 0,7, второго — 0,8 и третьего — 0,9. Найдите математическое ожидание числа попаданий в цель.

Решение. Пусть случайная величина X_1 — число попаданий в цель для первого стрелка, X_2 —число попаданий в цель для второго стрелка, X_3 — число попаданий в цель для третьего стрелка. Тогда случайная величина $Z = X_1 + X_2 + X_3$ — число попаданий в цель трех стрелков. Но математическое ожидание суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их математических ожиданий. Следовательно,

$$M(Z) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3).$$

Таблица распределения вероятностей случайной величины X_1

x_i	0	1
p_i	0,3	0,7

, следовательно, $M(X_1) = 0,7$.

Аналогично $M(X_2) = 0,8$ и $M(X_3) = 0,9$.
Значит, $M(Z) = 0,7 + 0,8 + 0,9 = 2,4$.

Задачи

210. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной таблицей распределения вероятностей:

x_i	2	3	6	7	8	10
p_i	0,1	0,2		0,2	0,15	0,1

До выполнения задания вычислите вероятность того, что случайная величина примет значение $x = 6$.

211. В апреле среднесуточная температура воздуха для некоторой местности удовлетворяет следующему закону распределения вероятностей:

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$

Найдите математическое ожидание $M(t)$ среднесуточной температуры.

212. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими таблицами распределения:

x_i	-2	-1	0	1	3
p_i	0,1	0,2	0,25	0,35	0,1

y_j	-3	0	1	2
q_j	0,1	0,2	0,4	0,3

Значения какой из этих случайных величин более рассеяны от их средних значений? Найдите $M(X+Y)$ и $D(X+Y)$

213. Случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1

Вычислите вероятность события $(m - \sigma \leqslant X \leqslant m + \sigma)$.

214. На факультете успеваемость составляет 90%. Наудачу выбираются 40 студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа успевающих студентов, оказавшихся в выбранной группе.

215. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,2. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 5 попаданий в цель?

216. Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа произведенных выстрелов.

217. Набрасываются кольца на колышек или до первого попадания или до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Покажите, что если вероятность набросить каждое кольцо на колышек равна 0,9, то математическое ожидание случайного числа брошенных колец равно 1,1111.

218. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бракованных деталей, если проверяется партия из 10 000 деталей, а вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,005.

219. Из 15 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 15, наудачу извлекаются 3 жетона. Составьте таблицу распределения вероятностей для числа выбранных жетонов, номера которых кратны пяти. Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

220. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими таблицами распределения вероятностей:

x_i	2	3	4
p_i	0,6	0,3	0,1

y_j	1	2	3
q_j	0,1	0,2	0,7

Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = XY$ двумя способами: а) составив предварительно таблицу распределения вероятностей случайной величины Z, б) используя свойство $M(XY) = M(X)\,M(Y)$.

221. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими таблицами распределения вероятностей:

x_i	1	3
p_i	0,7	0,3

y_j	2	4
q_j	0,6	0,4

Найдите дисперсию случайной величины $Z = X + Y$ двумя способами:

а) составив предварительно таблицу распределения вероятностей случайной величины Z,

б) используя свойство: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

222. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X соответственно равны $M(X) = 7$; $D(X) = 1{,}2$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин: а) $2X - 3$; б) $4X$; в) $3X + 5$.

223. Случайные величины X и Y имеют $M(X) = 4$, $M(Y) = 5{,}5$. Найдите математическое ожидание случайной величины

$$Z = 2X + 3Y - 1{,}5.$$

224. Испытывается устройство, состоящее из пяти независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов соответственно равны 0,05; 0,06; 0,08; 0,09; 0,1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа отказавших приборов.

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функция $F(x)$, определенная равенством

$$F(x) = P(X < x),$$

называется *интегральной функцией распределения вероятностей случайной величины* X.

Интегральная функция дает общий способ задания как дискретных, так и непрерывных случайных величин.

В случае непрерывной случайной величины $P(X = a) = 0$, $P(X = b) = 0$, поэтому все события: $a < X < b$, $a \leqslant X < b$,

$a < X \leqslant b$, $a \leqslant X \leqslant b$ — имеют одну и ту же вероятность, равную приращению интегральной функции на этом промежутке, т. е.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \qquad (37)$$

Литература: [1], § 22, с. 84—91.

Пример 40. Дискретная случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,15	0,2	0,35	0,2

Найдем интегральную функцию распределения и построим ее график.

Решение. Для дискретной случайной величины

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{\{i \mid x_i < x\}} P(X = x_i);$$

следовательно,

если $x \leqslant 1$, то $F(x) = 0$;
если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = 0{,}1$;
если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}25$;
если $3 < x \leqslant 4$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}45$;
если $4 < x \leqslant 5$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}8$;
если $x > 5$, то $F(x) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}2 = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}1 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}25 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}45 & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 0{,}8 & \text{при } 4 < x \leqslant 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

График интегральной функции $F(x)$ рассматриваемой случайной величины X дан на рисунке 12.

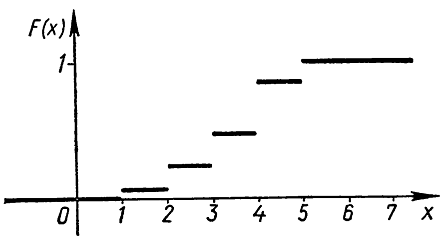


Рис. 12

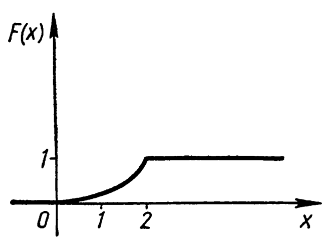


Рис. 13

Пример 41. Случайная величина X задана следующей интегральной функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{8}x^3 & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Построим график интегральной функции и найдем вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение в интервале $]0,5;\ 1,5[$.

Решение. График интегральной функции $F(x)$ дан на рисунке 13.

Вероятность того, что случайная величина в результате испытания примет значение в интервале $]0,5;\ 1,5[$, т. е. $P(0,5 < x < 1,5)$, можно вычислить по формуле (37), с учетом того, что интервал $]0,5;\ 1,5[$ лежит внутри промежутка $]0;\ 2[$.
Итак,

$$P(0,5 < X < 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \frac{1}{8}(1,5)^3 - \frac{1}{8}(0,5)^3 \approx 0,4063.$$

Задачи

225. Дискретная случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей:

x_i	0	2	4
p_i	0,3	0,5	0,2

Найдите интегральную функцию распределения и постройте ее график.

226. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос дано по 5 ответов, среди которых имеется один правильный. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа X правильных ответов, полученных при простом угадывании, и найдите интегральную функцию распределения вероятностей этой случайной величины.

227. Монета подбрасывается 3 раза. Для случайного числа появления герба: а) найдите интегральную функцию распределения вероятностей, б) найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

228. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения вероятностей

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant \frac{3}{2}, \\ 2x-3 & \text{при } \frac{3}{2} < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что: а) в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $]1{,}75;\ 2[$; б) в результате двух независимых испытаний случайная величина X оба раза примет значение из интервала $]1{,}7;\ 1{,}9[$.

229. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 4^x & \text{при } -\infty < x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение в интервале $]-1;\ 0[$. Постройте график интегральной функции и укажите отрезок, равный $P(-1 < X < 0)$.

230. Интегральная функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = A + B \operatorname{arcctg} x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найдите параметры A и B.

231. Значения случайной величины X находятся в интервале $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$. Может ли функция распределения для X равняться на этом интервале $\cos x$?

§ 4. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайная величина X, для которой функция распределения вероятностей $F(x)$ непрерывна, называется *непрерывной*.

Обычно рассматриваются непрерывные случайные величины, у которых $F(x)$ дифференцируема.

В этом случае функцию $p(x) = F'(x)$ называют *плотностью распределения вероятностей*.

Для таких величин вероятность того, что значение случайной величины принадлежит интервалу $]a;\ b[$, определяется равенством

$$P(a < x < b) = \int_a^b p(x)\,dx. \tag{38}$$

Геометрически правая часть этого равенства выражает площадь заштрихованной криволинейной трапеции (рис. 14).

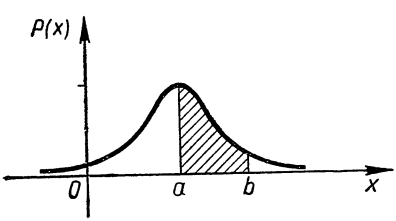


Рис. 14

Если плотность вероятности случайной величины X известна и равна $p(x)$, то интегральную функцию можно найти по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx. \tag{39}$$

Перечислим свойства плотности вероятности:

1) *Для всех значений x имеем* $p(x) \geqslant 0$.

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1.$ (40)

3) *Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу* $]a; b[$, *то*

$$\int\limits_{a}^{b} p(x)\,dx = 1. \qquad (40')$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности $p(x)$ называют определенный интеграл

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx. \qquad (41)$$

При этом предполагается, что интеграл абсолютно сходится.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения от среднего значения. Если плотность вероятности для X равна $p(x)$, то

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2\, p(x)\,dx. \qquad (42)$$

Дисперсию непрерывной случайной величины удобнее вычислять по формуле

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - (M(X))^2. \qquad (43)$$

Средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}. \qquad (44)$$

Если $Y = \varphi(X)$ есть функция случайного аргумента X, имеющего плотность вероятности $p(x)$, то математическое ожидание и дисперсия случайной величины Y находятся по формулам:

$$M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, p(x)\,dx; \qquad (45)$$

$$D(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x))^2\, p(x)\,dx - (M(Y))^2. \qquad (46)$$

Литература: [1], § 23, с. 91—94, § 31, с. 128—133, § 33, с. 143—146.

Пример 42. Дана интегральная функция непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{8}x^3 & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

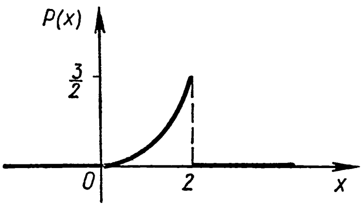


Рис. 15

Найдем плотность вероятности $p(x)$, построим график этой функции и найдем вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение в интервале $]0,5;\ 1,5[$.

Р е ш е н и е. Так как $p(x) = F'(x)$, то

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{3}{8}x^2 & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 15. Для того чтобы найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]0,5;\ 1,5[$, вычислим площадь криволинейной трапеции.

По формуле (38)

$$P(0,5 < X < 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{3}{8} x^2\, dx = \frac{x^3}{8}\Bigg|_{0,5}^{1,5} \approx 0,4063.$$

Сравните полученный результат с результатом, полученным в примере 41.

П р и м е р 43. Плотность вероятности случайной величины имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2}\sin x & \text{при } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Построим график функции $p(x)$ и на основе исследования графика покажем, что вероятности попадания случайной величины в интервалы $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$ и $\left]\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{4}\pi\right[$ равны между собой, а математическое ожидание случайной величины равно $\frac{\pi}{2}$.

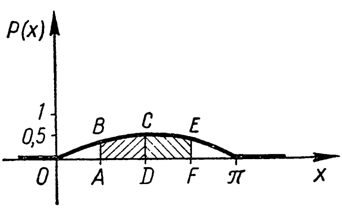


Рис. 16

Р е ш е н и е. График функции $y = p(x)$ изображен на рисунке 16.

Так как этот график симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, то:

1) $M(X) = \frac{\pi}{2}$;

2) площади криволинейных трапеций $ABCD$ и $DCEF$ равны между собой. А площадь криволинейной трапеции равна вероятности попадания случайной величины в интервал, являющийся основанием этой трапеции. Следовательно, $P\left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi\right)$.

Пример 44. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины X:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ A \sin x & \text{при } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найдем интегральную функцию $F(x)$, предварительно вычислив значение параметра A.

Решение. Так как все значения случайной величины X принадлежат интервалу $]0; \pi[$, то, используя (40′), получим:

$$\int_0^\pi A \sin x \, dx = 1 \text{ или } A \int_0^\pi \sin x \, dx = 1, \text{ т. е. } 2A = 1.$$

Откуда

$$A = \frac{1}{2}.$$

Для нахождения интегральной функции воспользуемся формулой (39).

При $x \leqslant 0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \, dx = 0.$

При $0 < x \leqslant \pi$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_0^x \frac{1}{2} \sin x \, dx = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$

При $x > \pi$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin x \, dx + \int_\pi^x 0 \, dx = 1.$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{при } 0 < x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Пример 45. Случайная величина X задана плотностью вероятности $p(x) = \frac{1}{2}x - 5$ в интервале $]10; 12[$, вне этого интервала $p(x) = 0$. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Найдем математическое ожидание, используя формулу (41):

$$M(X)=\int_{10}^{12} x\left(\frac{1}{2}x-5\right)dx=11\frac{1}{3}.$$

Дисперсию случайной величины найдем по формуле (43):

$$D(X)=\int_{10}^{12} x^2\left(\frac{1}{2}x-5\right)dx-(M(X))^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{10}^{12} x^3\,dx-5\int_{10}^{12} x^2\,dx-\left(11\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

Зная дисперсию, найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{3}}\approx 0{,}526.$$

Пример 46. Случайная величина X задана плотностью вероятности $p(x)=2x$ в интервале $]0;\,1[$, вне этого интервала $p(x)=0$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Используя формулы (45) и (46), получим:

$$M(Y)=\int_0^1 x^2\,2x\,dx=2\int_0^1 x^3\,dx=0{,}5,$$

$$D(Y)=\int_0^1 (x^2)^2\,2x\,dx-(M(Y))^2=2\int_0^1 x^5\,dx-(0{,}5)^2=\frac{1}{12}.$$

Задачи

232. Дана интегральная функция непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 2a,\\ \dfrac{2}{a}x-4 & \text{при } 2a<x\leqslant\dfrac{5}{2}a,\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{5}{2}a, \text{ где } a>0.\end{cases}$$

Найдите плотность вероятности $p(x)$.

233. Дана интегральная функция случайной величины X:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}.$$

1) Найдите плотность вероятности $p(x)$ и постройте ее график.
2) Исследуя график функции $y=p(x)$, докажите, что:

а) вероятности принятия случайной величиной положительных и отрицательных значений равны между собой;

б) математическое ожидание X равно нулю.

234. Дана интегральная функция случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 4^x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

1) Найдите плотность вероятности $p(x)$.

2) Вычислите вероятность того, что в результате испытания случайная величина попадет в интервал $]-0{,}5;\ 0[$ (двумя способами):

а) используя свойства интегральной функции;

б) используя свойства функции $y = p(x)$.

235. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{a}x & \text{при } 0 < x \leqslant a, \\ 0 & \text{при } x > a, \text{ где } a > 0. \end{cases}$$

1) Найдите параметр a.

2) Постройте график функции $y = p(x)$.

3) Используя свойства графика, найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале $]1;\ 2[$.

236. Дана плотность вероятности случайной величины X:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{8}x & \text{при } 0 < x \leqslant 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

1) Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

2) Найдите вероятность того, что в результате испытания:

а) случайная величина примет значение в интервале $]0{,}5;\ 1[$;

б) примет значение в интервале $]0{,}5;\ 1[$ или в интервале $]2;\ 2{,}5[$;

в) в результате пяти независимых испытаний случайная величина три раза примет значение в интервале $]1;\ 3[$.

237. Случайная величина X, принимающая положительные значения, имеет плотность вероятности $p(x) = 2ax - ax^2$. Найдите границы значений случайной величины X, параметр a и математическое ожидание случайной величины X.

238. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите интегральную функцию $F(x)$, постройте ее график и определите по графику вероятность того, что случайная величина примет значение в интервале $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$.

239. Дана плотность вероятности случайной величины X:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 6,\\ \frac{1}{2}x-3 & \text{при } 6<x\leqslant 8,\\ 0 & \text{при } x>8.\end{cases}$$

Найдите интегральную функцию $F(x)$.

240. Дана плотность вероятности случайной величины X:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 12,\\ \frac{1}{2}x-A & \text{при } 12<x\leqslant 14,\\ 0 & \text{при } x>14.\end{cases}$$

Найдите параметр A.

241. Дана плотность вероятности случайной величины X:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 1,\\ x-\frac{1}{2} & \text{при } 1<x\leqslant 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X - 1$.

242. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$p(x)=\begin{cases}2x & \text{при } 0<x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0 \text{ или } x>1.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X^3$.

243. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \sin X$.

§ 5. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Говорят, что *распределение вероятностей непрерывной случайной величины X равномерно на интервале* $]a;\ b[$, если ее плотность вероятности постоянна на этом интервале и равна нулю вне его:

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant a,\\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a<x\leqslant b,\\ 0, & \text{если } x>b.\end{cases} \qquad (47)$$

В этом случае вероятность того, что значение величины принадлежит части $]c;\ d[$ интервала $]a;\ b[$, равна отношению мер этих интервалов:

$$P(x \in]c;\ d[) = \frac{d-c}{a-b}. \tag{48}$$

Точно так же определяется равномерное распределение случайной величины в плоской области Ω. В этом случае

$$p(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\Omega|}, & \text{если } (x,\ y) \in \Omega, \\ 0, & \text{если } (x,\ y) \notin \Omega, \end{cases}$$

где $|\Omega|$ — площадь области Ω. При таком распределении вероятность того, что точка $M\ (x,\ y)$ принадлежит части Ω_1 области Ω, равна отношению мер этих частей:

$$P(M(x,\ y) \in \Omega_1) = \frac{|\Omega_1|}{|\Omega|}. \tag{49}$$

На плоскости значения величины могут оказаться равномерно распределенными на некоторой линии Γ, имеющей длину l. Здесь приходится говорить не о плотности распределения вероятности, а о линейной плотности. Вероятность того, что точка $M\ (x,\ y)$ принадлежит области Ω_1, равна в этом случае $\frac{l_1}{l}$, где l_1 — длина пересечения Ω_1 с кривой Γ.

Литература: [1], § 24, с. 95—96.

Пример 47. Поезда метро идут с интервалом в 2 минуты. Пассажир появляется на перроне в произвольный момент времени. Время ожидания поезда есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение вероятностей. Найдем плотность вероятности, интегральную функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Из условия задачи $a = 0$, $b = 2$. Тогда, применяя формулу (47), получим:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Формула (39) позволяет найти интегральную функцию распределения.

При $x \leqslant 0$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$

При $0 < x \leqslant 2$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x.$

При $x > 2$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{2}\,dx + \int\limits_{2}^{x} 0\,dx = 1.$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}x & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Так как график функции $y = p(x)$ симметричен относительно прямой $x = 1$, то $M(X) = 1$.

Дисперсию случайной величины X найдем по формуле (43):

$$D(X) = \int\limits_{0}^{2} x^2 \frac{1}{2}\,dx - (M(X))^2 = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 - 1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 48. Событие, состоящее из мгновенного сигнала, должно произойти между одним и пятью часами. Время ожидания сигнала есть случайная величина X, имеющая равномерное распределение. Какова вероятность того, что сигнал будет зафиксирован в течение 20 мин после двух часов?

Решение. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $]1; 5[$. Найдем вероятность того, что при испытании ее возможное значение попадет в интервал $\left]2; 2\frac{1}{3}\right[$. По формуле (48)

$$P\left(2 < X < 2\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{4} \approx 0{,}083.$$

Пример 49. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка круга окажется внутри треугольника?

Решение. Пусть событие E состоит в том, что наудачу выбранная точка круга окажется внутри треугольника. Так как точка выбирается наудачу, то для вычисления вероятности события применим формулу (49).

Следовательно,

$$P(E) = \frac{S_{\triangle}}{S_{\text{кр.}}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} \approx 0{,}414.$$

Пример 50. Две точки независимо друг от друга выбираются наудачу внутри круга радиуса R. Какова вероятность того, что обе точки окажутся внутри вписанного в этот круг квадрата?

Решение. Испытание состоит в том, что две точки выбираются наудачу внутри круга. Пусть события E_1 и E_2 означают соответственно попадание первой и второй точки внутрь квадрата. Тогда событие E_1E_2 означает, что обе точки оказались внутри квадрата. События E_1 и E_2 являются независимыми. Следовательно, $p(E_1E_2) = p(E_1)\,p(E_2)$. Так как точки выбираются наудачу, то для вычисления вероятностей событий E_1 и E_2 применим формулу (49):

$$p(E_1) = p(E_2) = \frac{S_{\text{кв.}}}{S_{\text{кр.}}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Значит,

$$p(E_1E_2) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Пример 51. Внутри круга радиуса R наудачу выбирают точку. Необходимо найти интегральную функцию распределения вероятностей случайной величины X, являющейся расстоянием точки до центра круга, и плотность вероятности.

Решение. Для того чтобы найти интегральную функцию случайной величины X, вычислим $P(X < x)$, где $0 < x \leqslant R$. Следовательно, необходимо найти вероятность того, что точка окажется внутри круга, концентрического с данным, радиус которого равен x. Так как точка выбирается наудачу, то для вычисления $P(X < x)$ применим формулу (49), т. е.

$$P(X < x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}, \text{ где } 0 < x \leqslant R.$$

Отсюда

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2}{R^2} & \text{при } 0 < x \leqslant R, \\ 1 & \text{при } x > R. \end{cases}$$

Зная функцию распределения вероятностей $F(x)$, получим плотность вероятности:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{2x}{R^2} & \text{при } 0 < x \leqslant R, \\ 0 & \text{при } x > R. \end{cases}$$

Задачи

244. Случайная величина X задана интегральной функцией, график которой представлен на рисунке 17.

Найдите плотность вероятности и по виду функции определите, какое распределение вероятностей имеет эта случайная величина.

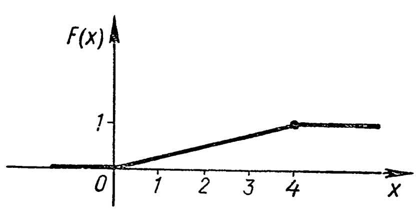


Рис. 17

245. Закон равномерного распределения вероятностей случайной величины X задан плотностью вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 3, \\ \frac{1}{5} & \text{при } 3 < x \leqslant 8, \\ 0 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

Найдите интегральную функцию случайной величины X.

246. Случайная величина X имеет равномерное распределение вероятностей на интервале $]4;\ 10[$. Найдите ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

247. Случайная величина X имеет равномерное распределение вероятностей. Найдите плотность вероятности, если математическое ожидание случайной величины X равно 8, а дисперсия равна $\frac{1}{3}$.

248. Из фиксированной вершины квадрата со стороной a произвольным радиусом, меньшим его диагонали, проведена окружность. Какова вероятность того, что она пересечет стороны квадрата, которым принадлежит данная вершина?

249. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что сумма их квадратов меньше 100. Какова вероятность того, что сумма этих квадратов окажется больше 64?

250. Шарик радиуса $r = 2$ см наудачу бросают в круг радиуса $R = 25$ см, в котором вырезано квадратное отверстие со стороной $a = 14$ см. Какова вероятность того, что шар пройдет через это отверстие, не задев его края, если он непременно попадет в круг?

251. Дано линейное уравнение $ax = b$. Если a выбирается наудачу на интервале $]0;\ 8[$ и b — на интервале $]0;\ 10[$, то какова вероятность того, что корень данного уравнения будет больше единицы?

252. В течение 20 мин после девяти часов ученик A в случайный момент времени звонит по телефону ученику B, ждет 2 мин, после чего кладет трубку. В течение тех же 20 мин ученик B заходит в свою квартиру в случайный момент и остается дома в течение 4 мин. Какова вероятность того, что разговор между учениками состоится?

253. На отрезке $AB = a$ независимо друг от друга наудачу взяты 3 точки. Какова вероятность того, что все они лежат от точки A не далее, чем на b $(b < a)$?

254. В равносторонний треугольник, сторона которого равна a, вписан круг. Внутри треугольника независимо друг от друга наудачу выбираются 5 точек. Какова вероятность того, что 3 из этих точек окажутся внутри круга?

255. Внутри шара радиуса R некоторым способом наудачу выбирается точка. Необходимо найти $F(x)$ и $p(x)$ случайной величины X, выражающей расстояние точки до центра шара.

256. В круге радиуса R наудачу проведена хорда параллельно заданному направлению. Найдите интегральную функцию случайной величины X, выражающей длину хорды.

§ 6. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Лемма Чебышева. *Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание, то для любого положительного α*

$$P(X < \alpha) > 1 - \frac{M(X)}{\alpha}. \tag{50}$$

Отсюда

$$P(X \geqslant \alpha) \leqslant \frac{M(X)}{\alpha} \tag{50'}$$

Неравенство Чебышева. *Если случайная величина X имеет конечную дисперсию $D(X)$ и математическое ожидание $M(X)$, то для любого положительного ε справедливо неравенство*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{51}$$

Отсюда

$$P(|X - M(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{51'}$$

Теорема Чебышева. *Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями $M(X_i)$ и дисперсиями $D(X_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), ограниченными одной и той же постоянной C, то для любого положительного ε*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

При доказательстве теоремы Чебышева получаем оценку

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \tag{52}$$

Следствие 1. (Теорема Чебышева для одинаково распределенных случайных величин.) *Если в условии теоремы Чебышева случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют одно и то же математическое ожидание $M(X_i) = a$, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Из (52) получаем оценку

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}. \tag{53}$$

С л е д с т в и е 2. (Теорема Бернулли). *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то при $n \to \infty$ для любого сколь угодно малого положительного* ε

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

где $\frac{m}{n}$ — относительная частота появления события A.

При доказательстве теоремы Бернулли получаем оценку

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (54)$$

Л и т е р а т у р а: [1], § 35—36, с. 148—154.

П р и м е р 52. При стрельбе по мишени, представляющей собой круг радиуса 30 см, средняя величина отклонения от центра мишени равна 6 см. Пользуясь леммой Чебышева, оценим вероятность поражения мишени при одном выстреле.

Р е ш е н и е. Мишень будет поражена, если произойдет событие $(X < 30)$. Средняя величина отклонения от центра мишени равна $M(X)$. Тогда по формуле (50) получим следующую оценку:

$$P(X < 30) > 1 - \frac{6}{30} = 0{,}8.$$

П р и м е р 53. Изготовлена партия деталей. Среднее значение длины детали равно 50 см, а среднее квадратическое отклонение равно 0,2 см. Оценим снизу вероятность того, что длина наудачу взятой детали окажется не менее 49,5 см и не более 50,5 см.

Р е ш е н и е. Случайная величина X — длина детали — имеет конечную дисперсию $D(X) = \sigma^2(X) = 0{,}04$ и математическое ожидание $M(X) = 50$. Следовательно, для оценки снизу вероятности рассматриваемого события $49{,}5 \leqslant X \leqslant 50{,}5$ применим неравенство Чебышева (51). Из неравенства $49{,}5 \leqslant X \leqslant 50{,}5$ следует $-0{,}5 \leqslant X - 50 \leqslant 0{,}5$, значит $|X - 50| \leqslant 0{,}5$.

Тогда

$$P(|X - 50| \leqslant 0{,}5) \geqslant 1 - \frac{0{,}04}{0{,}25} = 0{,}84.$$

П р и м е р 54. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин равна 4. Оценим вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий по абсолютной величине не превысит 0,2.

Р е ш е н и е. К последовательности рассматриваемых случайных величин можно применить теорему Чебышева, так как: 1) величины независимы, 2) дисперсии ограничены: $D(X_i) = 4$ $(i = 1, 2, \ldots, 1000)$, 3) математические ожидания существуют. Искомую оценку получим, используя неравенство (52), где $n = 1000$, $C = D(X) = 4$, $\varepsilon = 0{,}2$:

$$P\left(\left|\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} X_i - \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} M(X_i)\right| \leqslant 0{,}2\right) \geqslant 1 - \frac{4}{1000 \cdot 0{,}04} = 0{,}9.$$

Пример 55. Математическое ожидание числа очков, выпавших при подбрасывании игрального кубика, равно 3,5, а дисперсия равна $\frac{35}{12}$. Игральный кубик подбрасывается 350 раз. Оценим вероятность того, что среднее арифметическое числа выпавших очков отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 0,2.

Решение. Случайная величина X_i ($i = 1, 2, \ldots, 350$) — число очков, выпавших на верхней грани игрального кубика. Эти случайные величины: 1) независимы, 2) имеют ограниченные дисперсии, 3) имеют одно и то же математическое ожидание. Искомую оценку получим, используя неравенство (53), где $n = 350$, $D(X) = \frac{35}{12}$, $\varepsilon = 0{,}2$, $a = 3{,}5$:

$$P\left(\left|\frac{1}{350}\sum_{i=1}^{350} X_i - 3{,}5\right| \leqslant 0{,}2\right) \geqslant 1 - \frac{35}{12 \cdot 350 \cdot 0{,}04} \approx 0{,}792.$$

Пример 56. Оценим вероятность того, что в результате подбрасывания игральной кости в течение 320 раз относительная частота появления на верхней грани пяти очков отклонится от вероятности этого события (по абсолютной величине) не более чем на 0,03.

Решение. Рассматриваемые испытания удовлетворяют схеме Бернулли: 1) испытания независимы, 2) каждое испытание имеет два исхода (на верхней грани появилось 5 очков, на верхней грани не появилось 5 очков), 3) вероятность появления 5 очков в каждом испытании постоянна и равна $p = \frac{1}{6}$. Следовательно, для оценки события $\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right|\right) \leqslant 0{,}03$, где $\frac{m}{n}$ — относительная частота появления 5 очков, можно применить неравенство (54), где $n = 320$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $\varepsilon = 0{,}03$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0{,}03\right) \geqslant 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{320 \cdot (0{,}03)^2} \approx 0{,}518.$$

Задачи

257. Средняя величина вклада в некоторой сберегательной кассе составляет 50 руб. Оцените вероятность того, что наудачу выбранный вклад не превысит 2000 руб.

258. Математическое ожидание начальной скорости снаряда равно 600 м/сек. Оцените вероятность того, что могут наблюдаться значения начальной скорости, превышающие 900 м/сек.

259. Если среднее значение начальной скорости снаряда равно 600 м/сек, то какие значения скорости можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,4?

260. Средняя температура в квартире, подключенной к теплоцентрали, в период отопительного сезона составляет 20°С, а среднее квадратическое отклонение равно 2°С. Оцените вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсолютной величине не более чем на 5°С.

261. Игральный кубик подбрасывается 180 раз. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что 5 очков появится от 24 до 36 раз. Оцените вероятность этого же события с помощью интегральной теоремы Лапласа.

262. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,6. Используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Лапласа, оцените вероятность наличия от 340 до 380 изделий высшего качества в партии из 600 изделий. Сравните полученные результаты.

263. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,8. Проверяется 800 изделий. Случайная величина X — число изделий высшего качества. Укажите промежуток, в котором значения этой случайной величины можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,5.

264. Дисперсия каждой из независимых случайных величин X_i, означающей продолжительность горения электролампочки, не превышает 20 час. Сколько надо взять для испытания лампочек, чтобы вероятность того, что абсолютное отклонение средней продолжительности горения лампочки от средней арифметической их математических ожиданий не превышает одного часа, была не меньше 0,95?

265. Каждая из 2000 независимых случайных величин X_i ($i = 1, 2, \ldots, 2000$) имеет дисперсию, равную 4,5. Математические ожидания этих случайных величин одинаковы. Оцените вероятность того, что среднее арифметическое случайных величин отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 0,15.

266. Применима ли к последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ теорема Чебышева, если каждая случайная величина X_n задана таблицей распределения:

а)

X_n	$-na$	0	na
$p(X_n)$	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

б)

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
$p(X_n)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

где $\alpha > 0$ — постоянная величина?

267. Применима ли к последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, имеющих равномерное распределение в промежутке $]a; b[$, теорема Чебышева?

268. Оцените вероятность того, что при 200 бросаниях монеты относительная частота появления герба отклонится от вероятности появления герба при одном испытании по абсолютной величине не более чем на 0,1.

§ 7. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X называется *нормальным*, если ее закон распределения вероятностей определяется плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{55}$$

Для таких величин a — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение.

Теорема. *Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал* $]\alpha; \beta[$ *определяется по формуле*

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{56}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ — функция Лапласа.

Следствие 1. *Вероятность того, что отклонение случайной величины* X, *имеющей нормальное распределение, от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше, чем* α $(\alpha > 0)$, *определяется по формуле*

$$P(|X - a| < \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right). \tag{57}$$

Следствие 2. *Если в формуле* (57) *положить* $\alpha = \sigma$; $\alpha = 2\sigma$; $\alpha = 3\sigma$, *то*

$$P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6826,$$
$$P(|X - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9544,$$
$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Таким образом, практически достоверно, что распределенная по нормальному закону случайная величина X принимает свои значения в интервале $]a - 3\sigma; a + 3\sigma[$.

Литература: [1], § 24, с. 96—98.

П р и м е р 57. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией 4. Найдем выражение для плотности вероятности этой случайной величины.

Р е ш е н и е. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Из условия задачи $a=3$, $\sigma=\sqrt{D(x)}=2$.

Следовательно,

$$p(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

П р и м е р 58. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением, равным 3 годам. Определим вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.

Р е ш е н и е. По условию задачи $a=15$, $\sigma=3$, $\alpha=10$, $\beta=20$. Требуется найти $P(10<X<20)$. Применяя формулу (56), получим:

$$P(10<X<20)=\Phi\left(\frac{20-15}{3}\right)-\Phi\left(\frac{10-15}{3}\right)=2\Phi\left(\frac{5}{3}\right).$$

Из таблицы функции Лапласа находим, что $\Phi(1{,}67)=0{,}4525$. Следовательно, $P(10<X<20)=0{,}9050$.

П р и м е р 59. Распределение веса консервных банок, выпускаемых заводом, подчиняется закону нормального распределения со средним весом 250 г и средним квадратическим отклонением, равным 5 г. Определим вероятность того, что отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 8 г.

Р е ш е н и е. По условию задачи $a=250$, $\sigma=5$, $\alpha=8$. Требуется найти вероятность события $(|X-250|\leqslant 8)$. Применяя формулу (57), получим:

$$P(|X-250|\leqslant 8)=2\Phi\left(\frac{8}{5}\right).$$

Из таблицы функции Лапласа находим, что $\Phi(1{,}6)=0{,}4452$. Следовательно, $P(|X-250|\leqslant 8)\approx 0{,}8904$.

Задачи

269. Плотность вероятности случайной величины X, подчиненной нормальному закону распределения, задана функцией

$$p(x)=Ae^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$$

Найдите коэффициент A и определите вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале $]2; 5[$.

270. Во сколько раз уменьшится максимальное значение ординаты нормальной кривой, если дисперсия случайной величины увеличится в 9 раз?

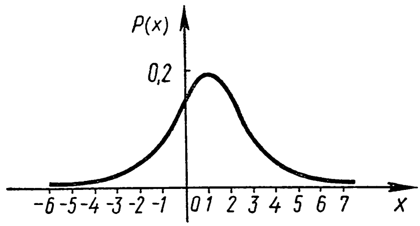


Рис. 18

271. Максимальное значение плотности вероятности случайной величины X, подчиненной нормальному закону распределения, равно $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$. Найдите среднее квадратическое отклонение и дисперсию этой случайной величины.

272. Случайная величина X, подчиненная нормальному закону распределения, имеет следующую кривую плотности вероятности (рис. 18). Используя график $y = p(x)$, найдите математическое ожидание и ориентировочное значение среднего квадратического отклонения.

273. Используя свойства кривой плотности вероятности случайной величины X, подчиненной нормальному закону распределения, найдите ее математическое ожидание, если известно, что $P(-\infty < X < -3) = P(7 < X < +\infty)$. Сделайте чертеж.

274. Случайная величина X распределена нормально и имеет плотность вероятности

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

Найдите математическое ожидание случайной величины $Y = 4x - 2$ (также подчиненной нормальному закону распределения вероятностей).

275. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$p(x) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{0,5}}.$$

Найдите вероятность того, что при двух независимых испытаниях случайная величина X хотя бы один раз примет значение вне интервала $]4; 6[$.

276. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 50$. Определите дисперсию случайной величины X, если известно, что вероятность принятия случайной величиной значения в интервале $]50; 60[$ равна 0,3413.

277. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 2$. Найдите интервал $]\alpha; \beta[$, в котором эта случайная величина принимает свои возможные значения с вероятностью 0,61, если известно, что $\alpha = -\beta$.

278. Случайная величина X — отклонение размера детали от стандарта — имеет нормальное распределение вероятностей со средним квадратическим отклонением, равным 0,2. Систематическая ошибка отсутствует. Найдите вероятность изготовления детали, отвечающей требованиям стандарта, если задан допуск $\pm 0{,}5$.

279. При измерении детали ее длина X является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 22$ см и $\sigma = 0{,}2$ см. Найдите интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадает X.

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Статистической совокупностью называют множество однородных предметов или явлений. Число n элементов этого множества называется *объемом* совокупности.

Наблюдаемые значения x_i признака X называют *вариантами*. Если расположить варианты в возрастающей последовательности, то получим *дискретный вариационный ряд*. В случае группировки вариант по интервалам получим *интервальный вариационный ряд*.

Под *частотой* m значения признака понимают число членов совокупности с данной вариантой.

Отношение частоты к объему статистической совокупности называют *относительной частотой* значения признака:

$$W = \frac{m}{n}. \tag{58}$$

Соответствие между вариантами вариационного ряда и их частотами (или относительными частотами) называют *статистическим распределением выборки*. Графическим представлением статистического распределения может служить *полигон частот* (или относительных частот).

Литература: [1], § 40, с. 164—167.

Пример 60. Путем опроса получены следующие данные о возрасте (число полных лет) 25 студентов первого курса:

18,	17,	23,	18,	17,
19,	18,	20,	17,	22,
19,	21,	18,	18,	17,
22,	18,	21,	17,	21,
18,	19,	17,	23,	17.

Составим статистическое распределение студентов по возрасту. Найдем размах варьирования $R = x_{\max} - x_{\min}$, построим полигон частот и составим ряд распределения относительных частот.

Решение. Используя исходные данные, составим статистическое распределение выборки

x_i	17	18	19	20	21	22	23
m_i	7	7	3	1	3	2	2

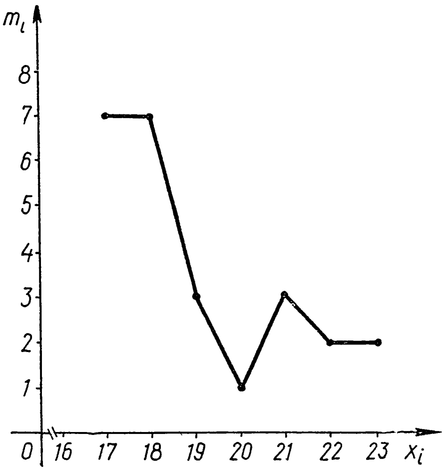


Рис. 19

Тогда размах варьирования будет: $R = 23 - 17 = 6$. Чтобы построить полигон частот, отложим на оси абсцисс возможные значения признака и из полученных точек восставим перпендикуляры высотой m_i.

После этого последовательно соединим концы перпендикуляров отрезками (рис. 19).

Используя формулу (58), найдем относительные частоты значения признака X, затем составим ряд распределения относительных частот:

x_i	17	18	19	20	21	22	23
$\frac{m_i}{n}$	0,28	0,28	0,12	0,04	0,12	0,08	0,08

Задачи

280. Из 280 контрольных работ по математике 70 работ оценено на «отлично». Найдите относительную частоту контрольных работ, оцененных на «отлично».

281. По цели произведено 40 выстрелов. Относительная частота попаданий в мишень оказалась равной 0,85. Найдите число попаданий в мишень.

282. Выберите отрывок текста, содержащий 200 букв. Найдите относительную частоту появления: 1) гласной буквы, 2) буквы k, 3) буквы a.

283. Из полного набора костей домино наудачу извлекается одна кость. Чтобы оценить вероятность появления «дубля», повторим этот опыт 100 раз, каждый раз тасуя кости. Вычислите относительную частоту появления «дубля» и сравните ее с вероятностью появления этого события.

284. Поставьте опыт: 10 студентов по 28 раз вынимают наудачу кость из полного набора домино и каждый раз записывают выпавшее число очков. С помощью 280 данных статистической совокупности составьте статистическое распределение выборки. На одном чертеже постройте полигон относительных частот и многоугольник распределения вероятностей по следующей таблице:

Число очков	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

Сравните их.

285. Постройте полигон относительных частот по данным распределения студентов 1 курса по размерам обуви:

Размер обуви	35	36	37	38	39	40	41	42
Число студентов	3	5	6	13	10	7	4	2

286. Дана исходная таблица распределения тридцати абитуриентов по числу баллов, полученных ими на вступительных экзаменах:

12	15	20	17	16	18
18	19	19	14	16	13
12	13	13	15	16	14
14	16	17	12	15	16
15	12	13	13	15	17

Постройте статистическое распределение абитуриентов по числу полученных баллов. Найдите размах варьирования.

287. Имеются данные о количестве студентов в 24 группах:

28	27	26	28	27	25	22	24
25	23	24	25	22	21	23	19
20	21	22	19	21	20	22	18

Составьте статистическое распределение выборки.

288. Подбросьте 100 раз монету и найдите, сколько раз она упадет вверх гербом. Найдите относительную частоту появления этого события и сравните ее с вероятностью появления герба.

289. Подбросьте 100 раз игральную кость и найдите относительные частоты следующих событий:

а) выпадение двух очков,

б) выпадение шести очков,

в) выпадение четного числа очков,

г) выпадение числа очков, кратного трем.

Сравните полученные относительные частоты с вероятностями появления этих событий.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

Пусть выборка задана рядом распределения частот признака X:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_s
m_i	m_1	m_2	m_3	...	m_s

где $\sum\limits_{i=1}^{s} m_i = n$.

Тогда *средним арифметическим* выборки называют величину

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{s} m_i x_i. \tag{59}$$

Дисперсией или мерой рассеяния значений признака X по отношению к его среднему арифметическому называют величину

$$D(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \overline{X})^2, \tag{60}$$

а корень квадратный из дисперсии называют *средним квадратическим отклонением*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{61}$$

Отношение среднего квадратического отклонения к среднему арифметическому выборки, выраженное в процентах, называется *коэффициентом вариации* V.

$$V = \frac{\sigma}{\overline{X}} \cdot 100\ \%. \tag{62}$$

Эмпирической функцией распределения относительных частот называют функцию, определяющую для каждого значения относительную частоту события $(X < x)$, т. е.

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{m_x}{n},$$

где m_x — число вариант, меньших x, а n — объем выборки.

Литература: [1], § 41, с. 169—171.

Пример 61. Пусть статистическое распределение выборки имеет вид:

x_i	17	18	19	20	21	22	23
m_i	7	7	3	1	3	2	2

Тогда ряд распределения относительных частот признака X имеет вид

x_i	17	18	19	20	21	22	23
$\frac{m_i}{n}$	0,28	0,28	0,12	0,04	0,12	0,08	0,08

Найдем характеристики $\overline{X}$, $D(X)$, $\sigma(X)$, V.

Среднюю арифметическую признака X найдем по формуле

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{s} m_i x_i' + C,$$

где $x_i' = x_i - C$ — условная варианта. Пусть $C = 20$, тогда

$$\overline{X} = \frac{-21 - 14 - 3 + 0 + 3 + 4 + 6}{25} + 20 = 19.$$

Дисперсия признака X равна

$$D(X) = \frac{1}{25}\Big((-2)^2 \cdot 7 + (-1)^2 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 2 + $$
$$+ 4^2 \cdot 2\Big) = 3,92,$$

тогда $\sigma(X) = \sqrt{3,92} \approx 1,93$ и коэффициент вариации V равен

$$V = \frac{1,98}{19} \cdot 100 = 10,4\ \%.$$

Задачи

290. Вычислите значения $\overline{X}$, $D(X)$, $\sigma(X)$, V по данным задачи 286.

291. Вычислите значения $\overline{X}$, $D(X)$, $\sigma(X)$, V по данным задачи 287.

292. Лабораторная работа № 1.

Задание. Путем опроса n студенток соберите данные о размере их обуви, составьте исходную таблицу и дайте общую характеристику рассматриваемого признака.

Цель работы

Овладение различными методами сбора статистических данных.

Нахождение точечных (определяемых одним числом) характеристик вариационного ряда.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Составьте исходную таблицу рассматриваемого признака, выбрав один из следующих вариантов решения задачи:

Варианты	1	2	3	4	5	6
n	10	15	20	25	30	40

где n — число опрошенных студенток.

2. Составьте дискретный вариационный ряд признака X.
3. Составьте статистическое распределение частот и относительных частот признака X. Постройте соответствующие им полигоны.
4. Составьте эмпирическую функцию распределения относительных частот $F^*(x)$ и постройте ее график.
5. Найдите точечные характеристики вариационного ряда: среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

6. Ответьте на следующие вопросы:

1) Какие способы отбора применяются на практике?

2) При заданном объеме выборки n найдите такую, которая имеет наименьшую возможную дисперсию. Как называют в этом случае статистическую оценку?

3) Сравните средние арифметические выборок разного объема. При каких значениях n они будут приближенно равны между собой? Какой вывод отсюда можно сделать?

4) Для найденных выборочных дисперсий D_B найдите исправленные дисперсии $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$. При каких значениях n выборочная и исправленная дисперсии мало отличаются друг от друга? Какую из этих дисперсий принимают в качестве оценки генеральной дисперсии при различных объемах выборки n?

5) Сравните коэффициенты вариации нескольких вариационных рядов. Какой из этих рядов имеет большее рассеяние?

293. Лабораторная работа № 2.

Задание. Соберите данные о росте студенток, обучающихся на факультете, и составьте исходную таблицу рассматриваемого признака.

Цель работы

Овладение различными способами отбора статистических данных.

Приобретение навыка составления общей характеристики непрерывного признака X.

Овладение методами составления приближенного распределения признака X, имеющего непрерывное распределение.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Составьте исходную таблицу рассматриваемого признака X, выбрав один из следующих способов:

1) путем проведения сплошного опроса студенток, обучающихся в одной группе;

2) путем проведения сплошного опроса студенток, обучающихся в двух группах;

3) путем проведения сплошного опроса студенток, обучающихся на одном курсе;

4) путем простого случайного бесповторного опроса 30 студенток;

5) путем простого случайного отбора нескольких учебных групп и обследования роста каждой третьей по списку студентки.

2. Найдите размах варьирования $R = x_{\max} - x_{\min}$.

3. Размах варьирования R разбейте на k частичных интервалов, число которых выбирается из условия $k \approx \sqrt{n}$. Тогда длина частичного интервала $l \approx \frac{R}{k}$.

4. Составьте статистическое распределение частот интервального вариационного ряда признака X:

$x_i \leqslant x < x_{i+1}$	$x_1 \leqslant x < x_2$	$x_2 \leqslant x < x_3$	...	$x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$
m_i	m_1	m_2	...	m_k

где $[x_i;\ x_{i+1}[$ — частичный интервал, а m_i — сумма частот вариант, попавших в данный интервал.

5. Вычислите: а) плотность частоты $\frac{m_i}{l}$ каждого интервала; б) относительные частоты $W_i = \frac{m_i}{n}$ и плотности относительных частот $\frac{W_i}{l}$. Заполните следующую таблицу:

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты	Плотность относительной частоты
i	$x_i \leqslant x < x_{i+1}$	m_i	$\frac{m_i}{l}$	$\frac{W_i}{l}$

6. Постройте гистограмму частот и гистограмму относительных частот. Покажите, что площадь гистограммы частот равна n, а площадь гистограммы относительных частот равна единице.

7. Составьте статистическое распределение частот дискретного вариационного ряда, заменив интервалы (см. пункт 4) представителями, равными $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Найдите среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение рассматриваемого признака X.

§ 3. ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПО ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЕ. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ

Пусть проводятся n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. В этом случае вероятность того, что относительная частота будет отличаться от вероятности появления события A в каждом испытании по абсолютной величине не больше чем на ε, приближенно равна удвоенному значению функции Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi(x), \tag{63}$$

где $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$.

Интервальной оценкой называют такую оценку, которая определяется двумя числами, являющимися концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр статистической совокупности.

Доверительным интервалом I_α называют интервал, который с заданной доверительной вероятностью α покрывает оцениваемый параметр статистической совокупности.

Рассматривая в формуле (63) величину p как неизвестную, заменим ее на приближенное значение $\frac{m}{n}$, полученное по данным выборки, тогда

$$P\left(\frac{m}{n}-\varepsilon<p<\frac{m}{n}+\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)}}\right). \qquad (64)$$

Формула (64) служит для оценки вероятности по относительной частоте.

$\frac{m}{n}-\varepsilon$ называют *нижней доверительной границей*, $\frac{m}{n}+\varepsilon$ — *верхней доверительной границей*, ε — предельной погрешностью для данной доверительной вероятности

$$\alpha=P\left(\frac{m}{n}-\varepsilon<p<\frac{m}{n}+\varepsilon\right).$$

Литература: [1], § 42, с. 171—175.

Пример 62. Вероятность того, что наудачу выбранная деталь не стандартна, равна 0,2. Какова вероятность того, что среди случайно отобранных 600 деталей относительная частота отклонится от вероятности появления нестандартной детали по абсолютной величине не более чем на 0,05?

Решение. По условию $n=600$, $p=0{,}2$, $\varepsilon=0{,}05$. Требуется найти $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}2\right|\leqslant 0{,}05\right)$. Используя формулу (63), получим:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}2\right|\leqslant 0{,}05\right)\approx 2\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{600}{0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)=2\Phi(3{,}06)$$

Из таблицы значений функции Лапласа находим значение $\Phi(3{,}06)$, равное 0,49888. Значит, $P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}2\right|\leqslant 0{,}05\right)\approx 0{,}99776$.

Пример 63. Определим необходимый объем выборки деталей, который гарантировал бы ошибку выборки (т. е. отклонение относительной частоты от вероятности появления события A по абсолютной величине), не превышающую 0,05 с вероятностью $\alpha=0{,}8664$, если известно, что вероятность появления бракованной детали равна 0,2.

Решение. По условию $p = 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}8664$. Требуется найти число отобранных деталей n. Используя формулу (63), получим:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}2\right| \leqslant 0{,}05\right) \approx 2\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = 0{,}8664.$$

Отсюда

$$\Phi\left(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = 0{,}4332.$$

Из таблицы значений функции Лапласа находим: $0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 1{,}5$.

Отсюда $\sqrt{n} = 12$. Следовательно, необходимо отобрать 144 детали.

Пример 64. Дана партия деталей. Определим процент брака, если выборка объема $n = 625$ выявила 40 нестандартных деталей. С доверительной вероятностью 0,95 найдем границы, в которых заключен процент брака во всей партии.

Решение. По условию $n = 625$, $m = 40$, $\alpha = 0{,}95$. Для вычисления предельной погрешности ε, гарантированной с вероятностью 0,95, заменим неизвестную вероятность p относительной частотой появления события A, равной $\frac{40}{625} = 0{,}064$. Тогда $p \approx \approx 0{,}064$. Используя формулу (64), получим:

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}}\right) = 0{,}95,$$

откуда

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}}\right) = 0{,}475.$$

С помощью таблицы значений функции Лапласа получаем:

$$\varepsilon\frac{25 \cdot 625}{\sqrt{40 \cdot 585}} = 1{,}96,$$

откуда находим $\varepsilon \approx 0{,}002$.

Таким образом, $p = \frac{m}{n} \pm \varepsilon = 0{,}064 \pm 0{,}002$.

Следовательно, $6{,}2\% < p < 6{,}6\%$.

Задачи

294. Игральная кость подбрасывается 320 раз. Какова вероятность того, что относительная частота появления пяти очков на верхней грани кости отклонится от вероятности появления этого события в одном испытании по абсолютной величине не более чем на 0,03?

295. Вероятность того, что наудачу выбранное из текста художественного произведения слово является именем существительным, равна 0,4. Какова вероятность того, что в случайно выбранном отрывке художественного произведения из 600 слов относительная частота появления имени существительного отклонится от вероятности этого события по абсолютной величине не более чем на 0,04?

296. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,99 можно было ожидать, что относительная частота появления герба отклонится от вероятности этого события по абсолютной величине не более чем на 0,05?

297. Вероятность того, что наудачу выбранное из текста художественного произведения слово является именем прилагательным, равна 0,15. Выбирается произвольный отрывок художественного произведения из 5100 слов. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,9544 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления имени прилагательного от ее вероятности 0,15 не превысила ε.

298. В публицистическом тексте из 565 слов глагол встретился 75 раз. С доверительной вероятностью, равной 0,9, оцените вероятность появления глагола в произвольном публицистическом тексте.

299. Из партии электролампочек выбрано и проверено 1000 электрических лампочек. Относительная частота появления нестандартной лампочки оказалась равной 0,15. Найдите 95% доверительный интервал для вероятности появления нестандартной лампочки при ее извлечении из данной партии.

§ 4. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ В СТАТИСТИКЕ

Пусть количественный признак X генеральной совокупности имеет нормальное распределение, тогда:

1. Если среднее квадратическое отклонение σ известно, то доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание a этого признака с доверительной вероятностью α, находится из условия

$$\bar{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (65)$$

где n — объем выборки, $\bar{x}_B$ — выборочная средняя арифметическая, t — аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\beta}{2}$.

При этом $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ называется *точностью оценки.*

2. Если среднее квадратическое отклонение σ неизвестно, то по данным выборки можно построить случайную величину, имеющую распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы, которое определяется только одним параметром n и не зависит от неизвестных параметров a и σ. Распределение Стьюдента даже для малых выборок $n < 30$ дает вполне удовлетворительные оценки. Тогда доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание a этого признака с доверительной вероятностью α, находится из условия:

$$\overline{x}_B - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{66}$$

где S — исправленное среднее квадратическое, t_α — коэффициент Стьюдента, находится по данным n и α из таблицы значений t_α (см. Приложение 2).

3. Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение σ этого признака с доверительной вероятностью α, находится из условия:

$$\begin{gathered} S\,(1 - q) < \sigma < S\,(1 + q), \text{ если } q < 1, \\ 0 < \sigma < S\,(1 + q), \text{ если } q > 1, \end{gathered} \tag{67}$$

где $q = \dfrac{\delta}{S}$ находится по данным n и α из таблицы значений q (см. Приложение 3).

Литература: [1], § 43, с. 175—177.

Пример 65. Из большой партии изготовленных валиков по выборке объема $n = 25$ найдена выборочная средняя арифметическая диаметра валика, равная 10 мм. Считая, что диаметр валика X — нормально распределенная случайная величина, найдем доверительный интервал, который с доверительной вероятностью 0,99 покрывает неизвестное математическое ожидание a диаметра валика, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0{,}1$ мм.

Решение. Из условия задачи $\sigma = 0{,}1$, $\overline{x}_B = 10$, $n = 25$, $\alpha = 0{,}99$. Так как σ известно, то для оценки параметра a используется условие (65):

$$\overline{x}_B - t \frac{\delta}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Неизвестное значение t получим из условия $\Phi(t) = \dfrac{0{,}99}{2} = 0{,}495$. По таблице значений $\Phi(t)$ найдем $t = 2{,}58$ (см. Приложение 1). Тогда точность оценки будет:

$$\delta = t \frac{\delta}{\sqrt{n}} \approx 0{,}05.$$

Следовательно, искомый доверительный интервал равен:

$$9{,}95 < a < 10{,}05.$$

Задачи

300. Из большой партии изготовленных деталей по выборке объема n найдена средняя арифметическая длины детали, равная $\overline{x}_B$.

Считая, что длина детали X — нормально распределенная случайная величина, найдите доверительный интервал, который с доверительной вероятностью α покрывает неизвестное математическое ожидание a длины детали, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0{,}5$ мм:

а) $\overline{x}_B = 50$ мм; $n = 64$; $\alpha = 0{,}95$.
б) $\overline{x}_B = 51$ мм; $n = 49$; $\alpha = 0{,}99$.
в) $\overline{x}_B = 52$ мм; $n = 36$; $\alpha = 0{,}999$.

301. Найдите минимальный объем выборки, при котором с доверительной вероятностью α точность оценки математического ожидания a — длины детали генеральной совокупности по выборочной средней — равна $\delta = 0{,}25$, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0{,}5$ мм и длина детали X — нормально распределенная случайная величина:

а) $\alpha = 0{,}95$; б) $\alpha = 0{,}99$; в) $\alpha = 0{,}999$.

302. Лабораторная работа № 3.

З а д а н и е. Проведите измерения толщины n спичек, выбранных простым случайным бесповторным отбором из 300—400 спичек, изготовленных на одной фабрике. Измерения выполните микрометром с ценой деления 0,01 мм.

П р и м е ч а н и е. Можно использовать данные, собранные при выполнении лабораторной работы № 2.

Ц е л ь р а б о т ы

Овладение методом составления доверительных интервалов для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ и для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Составьте исходную таблицу n проведенных измерений, выбрав один из следующих вариантов решения задачи:

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10	10	13	17	17	20	26	26	30	37
α	0,95	0,999	0,99	0,99	0,999	0,95	0,99	0,999	0,95	0,99

2. Составьте статистическое распределение частот результатов полученных измерений.

3. Вычислите среднее арифметическое $\bar{x}_B$ рассматриваемого признака X.

4. Вычислите исправленную среднюю квадратическую погрешность n измерений по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}.$$

5. Определите коэффициент Стьюдента t_α для заданной доверительной вероятности α и числа проведенных измерений n (из таблицы).

6. Найдите границы доверительного интервала для оценки математического ожидания a при заданной доверительной вероятности α, используя условие (66).

7. По данным α и n найдите значение q (см. Приложение 3).

8. Найдите границы доверительного интервала для оценки среднего квадратического отклонения σ при заданной доверительной вероятности α, используя условие (67).

Примечание. Величина точности оценки $\delta = t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$ должна быть больше величины погрешности прибора.

9. Ответьте на следующие вопросы:

1) Найдите значения коэффициента t из условия $\Phi(t) = \frac{\alpha}{2}$ для $\alpha = 0{,}95$; $0{,}99$; $0{,}999$ и сравните их со значениями коэффициента Стьюдента t_α при соответствующих значениях α и различных значениях n. Какой вывод из этого сравнения можно сделать?

2) Сравните точность оценки $t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$ для различных значений n и α. При каких условиях точность оценки увеличивается?

§ 5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Корреляционной зависимостью Y от X называют функциональную зависимость условной средней $\bar{y}_x$ от x.

$\bar{y}_x = f(x)$ представляет *уравнение регрессии Y на X*, а $\bar{x}_y = \varphi(y)$ — *уравнение регрессии X на Y*.

Корреляционная зависимость может быть линейной и криволинейной. В случае линейной корреляционной зависимости уравнение прямой линии регрессии имеет вид:

$$\bar{y}_x = ax + b, \tag{68}$$

где угловой коэффициент a прямой линии регрессии Y на X называется *выборочным коэффициентом регрессии Y на X* и обозначается ρ_{yx}.

При малых выборках данные не группируются. Параметры a и b находятся по методу наименьших квадратов из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} b\,\Sigma x_i + a\,\Sigma x_i^2 = \Sigma x_i y_i, \\ \quad nb + a\Sigma x_i = \Sigma\, y_i, \end{cases} \tag{69}$$

где n — число наблюдаемых значений пар взаимозависимых величин.

Выборочный линейный коэффициент корреляции r_B показывает тесноту связи между Y и X. Коэффициент корреляции находится по формуле

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}, \tag{70}$$

причем $|r_B| \leqslant 1$, а именно:

а) если $r_B = 0$, то X и Y не связаны корреляционной зависимостью;

б) если $|r_B| = 1$, то X и Y связаны функциональной зависимостью;

в) если $|r_B| < 1$, то между X и Y существует корреляционная зависимость, при этом эта связь тем теснее, чем $|r_B|$ ближе к единице.

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}). \tag{71}$$

При большом числе наблюдений признаков X и Y составляется корреляционная таблица с двумя входами, при этом одно и то же значение x наблюдается n_x раз, одно и то же значение y наблюдается n_y раз и одна и та же пара $(x;\ y)$ наблюдается n_{xy} раз.

Литература: [1], § 44, с. 177—181.

Пример 66. Проведено 10 наблюдений над контрольными участками посева. Данные наблюдений собраны в таблицу

x_i	6	11	11	7	8	10	12	6	10	9
y_i	27	32	33	30	30	33	34	29	31	32

где величина X — количество удобрений т/га, Y — урожайность ц/га.

Найдем выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X. Статистическими методами изучим зависимость между случайными величинами X и Y.

Решение. Рассмотрим влияние увеличения внесения удобрений на повышение урожайности. Связь между изучаемыми признаками может быть выражена уравнением прямой линии регрессии Y на X:

$$\overline{y}_x = ax + b.$$

Для вычисления параметров a и b составим расчетную таблицу:

№ наблюдений	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	27	6	36	162
2	32	11	121	352
3	33	11	121	363
4	30	7	49	210
5	30	8	64	240
6	33	10	100	330
7	34	12	144	408
8	28	6	36	168
9	31	10	100	310
10	32	9	81	288
$n = 10$	$\sum y_i = 310$	$\sum x_i = 90$	$\sum x_i^2 = 852$	$\sum x_i y_i = 2831$

Искомые параметры a и b найдем из системы уравнений (69):

$$\begin{cases} 90b + 852a = 2831, \\ 10b + 90a = 310. \end{cases}$$

Откуда $a \approx 0{,}98$; $b \approx 22{,}18$.

Тогда уравнение регрессии Y на X будет иметь вид:

$$\overline{y}_x = 0{,}98x + 22{,}18. \qquad (*)$$

Проверка. По данным наблюдений $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 9$; $\overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 31$.

Найдем значение $\overline{y}_x$ из уравнения $(*)$ при $x = \overline{x}$. Имеем $\overline{y}_x = 0{,}98 \cdot 9 + 22{,}18 = 31$. Расчеты произведены правильно, так как $\overline{y}_x = \overline{y}$. В системе координат построим точки (x_i, y_i) (рис. 20). Расположенные на плоскости точки группируются около некоторой прямой, что указывает на линейный характер связи между признаками. Причем эта линейная связь прямая. На этом же чертеже построим линию регрессии Y на X, заданную уравнением $\overline{y}_x = 0{,}98x + 22{,}18$. Действительно, точки

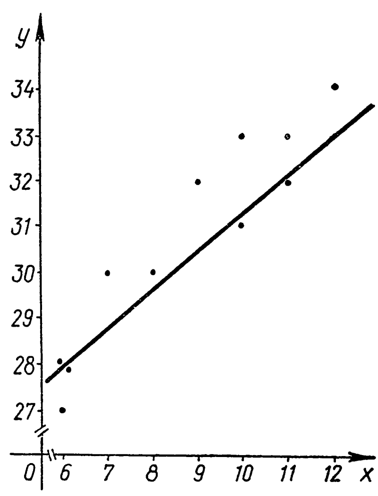


Рис. 20

(x_i, y_i) группируются около этой прямой. Рассчитаем по уравнению (*) ожидаемые значения урожайности и сравним их с выборочными значениями y_i при одних и тех же количествах внесенных удобрений x_i. Для сравнения составим таблицу:

x_i	y_i	$\overline{y}_x$	$\overline{y}_x - y_i$
6	27	28,06	1,06
11	32	32,96	0,96
11	33	32,96	—0,04
7	30	29,04	—0,96
8	30	30,02	0,02
10	33	31,98	—1,02
12	34	33,94	—0,06
6	28	28,06	0,06
10	31	31,98	0,98
9	32	31	—1,00

По значениям отклонений $\overline{y}_x - y_i$ можно сделать вывод о том, что ожидаемая урожайность достаточно хорошо согласуется с наблюдаемыми значениями y_i.

Задачи

303. Произведена случайная бесповторная выборка десяти ампул. Данные исследования количественных признаков: X — длина ампулы в мм и Y — объем ампулы в см³ — собраны в таблицу:

y_i	1,0	1,1	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,1	1,0	1,0
x_i	19,5	19,0	18,3	20	20,8	23	25,2	19,6	21	19,5

Статистическими методами изучите зависимость между случайными величинами X и Y и составьте уравнение прямой линии регрессии Y на X.

304. Произведена случайная бесповторная выборка десяти предприятий. Данные исследования количественных признаков: Y — среднемесячная выработка продукции на одного рабочего в тыс. руб., X — стоимость основных производственных средств в млн. руб. — собраны в таблицу:

y_i	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,1	1,0	1,2	1,2	1,3
x_i	9,9	10,1	10,2	10,2	10,1	10,2	10,4	10,4	10,5	10,5

Составьте уравнение прямой линии регрессии Y на X.

305. Лабораторная работа № 4.

З а д а н и е. На основании результатов экзаменационной сессии соберите данные об успеваемости по одному предмету (признак X) и по другому предмету (признак Y), с помощью статистических методов изучите зависимость между этими величинами.

Цель работы

Овладение методами установления связи между двумя случайными величинами X и Y при большом числе наблюдений и методами определения параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным.

Варианты лабораторной работы

1. Соберите данные о значениях признака X — успеваемость по математике и признака Y — успеваемость по физике у студентов одной из групп ($n = 20$).
2. Соберите данные о значениях признаков X и Y, рассмотренных в варианте 1, у студентов одного из курсов ($n = 45, 70, 100$).
3. Соберите данные о значениях признака X — успеваемость по марксистско-ленинской философии и признака Y — успеваемость по педагогике у студентов одной из групп.
4. Соберите данные о значениях признаков X и Y, рассмотренных в варианте 3, у студентов одного из курсов.

П р и м е ч а н и е. Данные о значениях признаков X и Y можно выборочно взять из экзаменационных ведомостей.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Полученные данные внесите в корреляционную таблицу

x_i \ y_i	2	3	4	5	n_x
2					
3			5 | 12		
4					
5					
n_y					n

Порядок заполнения клеток внутри таблицы поясним примером. В группе 5 студентов получили «удовлетворительно» (3) по математике и «хорошо» (4) по физике. В уголке клетки (на пересечении третьей строки и четвертого столбца) записывается значение xy, равное 12. После заполнения соответствующих клеток внутри таблицы подсчитайте n_x для каждого x_i и n_y для каждого y_i. Должно иметь место равенство $n = \sum n_x = \sum n_y$. По виду корреляционной таблицы установите форму корреляционной связи признаков X и Y.

2. Корреляционную таблицу дополните до расчетной таблицы и произведите необходимые вычисления.

x_i \ y_i	2	3	4	5	n_x	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_{xy} xy$
2								
3								
4								
5								
n_y					n	$\sum n_x x$	$\sum n_x x^2$	$\sum n_{xy} xy$
$n_y y$					$\sum n_y y$			
$n_y y^2$					$\sum n_y y^2$			
$n_{xy} xy$					$\sum n_{xy} xy$			

3. Вычислите $\bar{x} = \frac{\sum n_x x}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum n_y y}{n}$,

$$\overline{x^2} = \frac{\sum n_x x^2}{n}, \quad \overline{y^2} = \frac{\sum n_y y^2}{n}.$$

4. Найдите σ_x и σ_y по формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}.$$

5. По формуле (70) вычислите выборочный коэффициент корреляции r_B и установите по его величине степень тесноты связи.

6. Подставьте найденные величины в уравнение (71) прямой линии регрессии Y на X.

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

10. Рассматриваемому событию благоприятствует 13 исходов испытания: 1.1.11; 1.11.11; 11.1.11; 11.11.11; 2.2.22; 22.2.22; 3.3.33; 4.4.44; 5.5.55; 6.6.66; 7.7.77; 8.8.88; 9.9.99.

11. Целые числа от 1 до 15 в троичной системе следующие: 1,2,10,11,12,20,21,22,100,101,102,110,111,112,120.

13. Используя решето Эратосфена выпишите все простые числа от 1 до 90.

43. Предварительно составьте диаграмму Эйлера — Венна.

51. Найдите сумму вероятностей $p(A) + p(B)$.

52. Примените формулу $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

57. Если событие A — выход из строя элемента a, событие B — выход из строя элемента b и событие C — выход из строя элемента c, то событие $ABC + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}\overline{C}$ означает разрыв цепи.

59. Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4 соответствуют тому, что элементы цепи a, b, c, d за время t не выходят из строя. Тогда вся цепь не выходит из строя, когда выполняется событие $(A_1 + A_2) \times \times (A_3 + A_4)$. События A_1, A_2, A_3, A_4 — совместные и независимые. Поэтому $p((A_1 + A_2)(A_3 + A_4)) = p(A_1 + A_2) \cdot p(A_3 + A_4) = (p(A_1) + p(A_2) - p(A_1A_2))(p(A_3) + p(A_4) - p(A_3A_4))$.

61. $p(A) = \frac{1}{13}$; $p(B) = \frac{1}{4}$. Найдем произведение этих вероятностей: $p(A)\,p(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$. Но вероятность события AB (появление трефового туза) равна $\frac{1}{52}$. Следовательно, $p(AB) = p(A)\,p(B)$, и поэтому события A и B — независимые.

70. Производится выбор пары книг (по одной) из множества, содержащего 7 книг, и из множества, содержащего 9 книг.

74. Можно купить или по экземпляру каждого романа, или однотомник, содержащий два романа, и отдельно экземпляр недостающего романа.

Примените правило суммы и правило произведения выборки.

75. Подсчитайте число различных покупок, содержащих или один, или два, или три сорта конфет.

80. Заполнение диаграммы Эйлера — Венна необходимо начинать с области, являющейся пересечением трех кругов. В эту область относится число людей, знающих все три языка. После заполнения всех частей кругов подсчитайте число точек пространства элементарных событий, принадлежащих событию $A + B + C$.

85. Рассматриваемое множество содержит 3 элемента: {к, ж, з}, а выборка — m элементов.

86. Рассматриваемое множество состоит из двух элементов: {зуб есть, зуба нет}.

88. Рассматриваемое множество состоит из четырех элементов, а выборка — из двенадцати.

90. Составьте две выборки из одних и тех же элементов. Например, 145 и 451. Порядок расположения элементов в выборке важен, поэтому выборка упорядоченная.

95. Вначале надо выбрать 3 буквы из пяти согласных и поставить их на указанные места (A_5^3 способов). После каждого такого выбора оставшиеся 5 букв произвольным образом расставьте на остальные 5 мест (5! способов).

97. Так как необходимо составить нечетные числа, то имеются два способа выбора числа единиц (3 или 9). После каждого такого выбора оставшиеся 3 цифры можно упорядочить 3! способами.

101. Вопрос «...не менее двух коней?» эквивалентен вопросу «... или два, или три, или четыре коня?».

103. На первой прямой можно выбрать одну точку и после каждого такого выбора на второй прямой — две точки или на первой прямой выбрать две точки и после каждого такого выбора на второй прямой — одну точку.

104. Каждый студент должен получить по 3 учебника. Поскольку порядок элементов в выборе не играет роли, первый студент может получить 3 учебника C_{12}^3 способами. После каждого такого выбора остается 9 учебников и второй студент может получить 3 учебника C_9^3 способами. Два студента могут получить по 3 книги $C_{12}^3 C_9^3$ способами и т. д.

105. Имеется 32 черных поля на шахматной доске (см. указание к задаче 104).

106. Исследовать формулу числа перестановок из n элементов.

108. Круговые перестановки остаются неизменными при циклических перестановках людей.

109. Так как ожерелья остаются неизменными при циклических перестановках бусинок и при переворачивании, то можно составить $\frac{7!}{2 \cdot 7} = 360$ видов ожерелий.

114. В пятеричной системе счисления 5 цифр, а именно: 0,1, 2,3,4.

117. Каждый юноша может выбирать работу из пяти мест, а каждая девушка — из четырех мест.

118. Вначале найдите число способов выбора шести призеров из 20 участников, а затем после каждого такого выбора найдите число перестановок шести призов, которые имеют заданное число повторений (3; 2; 1).

119. Найдите число или однозначных, или двузначных, или трехзначных, или четырехзначных, или пятизначных, или шестизначных чисел, составленных из цифр 8 и 9.

121. В перестановках 4 буквы «е», идущие подряд, можно объединить и считать одним элементом.

124. Из десяти цифр 0, 1, ..., 9 можно составить по правилу произведения $9 \cdot 10^{n-1}$ n-значных чисел. Аналогично находится число n-значных чисел, составленных из нечетных цифр.

128. В задаче требуется найти вероятность того, что в число дежурных войдут две девушки и три юноши.

131. Непосредственным перебором подсчитайте число исходов, при которых два билета стоят не дороже 80 коп.

133. При подсчете числа исходов испытаний, благоприятствующих рассматриваемому событию, целесообразно трех определенных учеников объединить в одну группу. Тогда различных перестановок, в которых 3 определенных ученика окажутся рядом, будет 5! Но после каждой такой перестановки трех учеников можно поменять местами 3! способами. По правилу произведения выборки $m = 5! \cdot 3!$

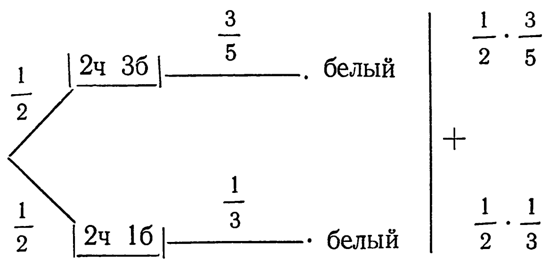
137. Необходимо найти вероятность того, что в числе получивших билеты будут 4 девушки или 3 девушки и 1 юноша.

141. Если событие A — правильный ответ, а событие B — неправильный ответ, то событие $A + BA + BBA$ означает, что до правильного ответа ученик отвечает не более трех раз. События A и B — зависимые.

142. Найдите вероятность события ABC, где событие A означает, что студент знает первый теоретический вопрос, событие B — что знает второй вопрос и событие C — что может решить задачу.

144. Если событие $К$ означает, что извлечен красный карандаш, событие $С$ — синий и событие $З$ — зеленый карандаш, то событие $К + ЗК + ЗЗК$ означает, что красный карандаш появится раньше синего.

150. Последовательность испытаний следующая: вначале наугад выбирается одна урна из двух одинаковых урн, после чего из урны наудачу выбирается шар. Эту последовательность испытаний удобно представить в виде «дерева» всех возможностей, показывая на ветвях этого дерева, с какой вероятностью может осуществиться эта возможность:



Следовательно, $p(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{15}$.

151. Необходимо выдвинуть гипотезы H_i ($i = 1,2,3$), означающие выбор i-й урны.

152. Необходимо выдвинуть гипотезы: H_1 — первая выбранная кость — «дубль», H_2 — первая кость не «дубль».

154. Необходимо выдвинуть гипотезы: H_1 — потеряны две карточки с гласными буквами, H_2 — потеряна карточка с гласной и карточка с согласной буквой, H_3 — потеряны две карточки с согласными буквами. Проверьте, что $\sum_{i=1}^{3} p(H_i) = 1$.

155. В данной задаче, а также в задачах 156—161 примените формулу Байеса.

161. Пусть A — событие, которое уже произошло, т. е. наудачу вызванный ученик оказался неподготовленным к уроку. Гипотеза H_1 означает, что вызвана отвечать девочка, гипотеза H_2 — вызван мальчик. Тогда требуется вычислить $p(H_2/A)$.

168. Решите уравнение: $1 - q^5 = 0{,}99757$,

174. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} m_0 \leqslant np + p, \\ m_0 \geqslant np - q. \end{cases}$$

175. В систему неравенств задачи 174 подставьте вместо q равное ему $1 - p$. Решив систему неравенств относительно p, получим:

$$\begin{cases} p \geqslant \dfrac{m_0}{n+1}, \\ p \leqslant \dfrac{m_0+1}{n+1}. \end{cases}$$

177. Вычислите $P_6(4)$, $P_6(5)$, $P_6(6)$ и сравните полученные результаты.

188. Для того чтобы ответить на вопрос задачи, найдите сначала $\lambda = np$. Из условия задачи $P_n(4) = P_n(5)$, т. е.

$$\frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda}. \text{ Откуда } \lambda = 5.$$

195. Чтобы построить многоугольник распределения вероятностей, используйте полученную таблицу. По оси абсцисс отложите возможные значения величины, по оси ординат—вероятности этих значений. Для наглядности можно выбрать различные масштабы на осях координат и полученные точки (x_i, p_i) соединить отрезками прямых (рис. 21).

197. В задачах 197 и 198 случайная величина имеет биномиальное распределение вероятностей.

199. Случайная величина имеет гипергеометрическое распределение вероятностей.

200. Случайная величина X (число израсходованных колец) примет значение $x = 5$, если первые 4 кольца не попадут на колышек, а пятое — попадет или все 5 колец не попадут на колышек. Следовательно, $P(X = 5) = pq^4 + q^5 = 0{,}0001$. Распределение вероятностей случайной величины X — геометрическое.

202. Так как имеются только 4 билета на места первого ряда, а выбираются 3 билета, то в выборке может быть либо 1, либо 2, либо 3 билета на первый ряд.

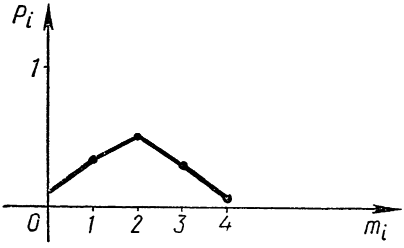


Рис. 21

203. В задачах 203 и 204 случайная величина имеет пуассоновское распределение вероятностей.

207. В верхнюю строку таблицы распределения вероятностей вначале рекомендуется записать все полученные произведения $x_i y_j$, а соответствующие им вероятности $r_{ij} = p_i q_j$ внести во вторую строку таблицы:

z_k	0	0	0	0	1	2	3	4
r_{ij}	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$

После этого составляется таблица распределения вероятностей случайной величины $Z = XY$, в которой каждое возможное значение повторяется только один раз. Причем

$$P(Z = z_k) = \sum_{x_i y_j = z_k} P(X = x_i)\, P(Y = y_j).$$

210. Для вычисления $P(X = 6)$ используйте свойство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

212. Сравните дисперсии случайных величин X и Y.

215. $M(X) = 5$, где X — случайная величина, имеющая биномиальное распределение вероятностей.

218. Случайная величина имеет пуассоновское распределение вероятностей.

224. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 — независимые случайные величины, означающие число отказавших приборов при испытании i-го прибора устройства. Случайная величина $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ будет означать число отказавших приборов при испытании всех приборов устройства. Но

$$M\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) = \sum_{i=1}^{5} M(X_i).$$

А математическое ожидание $M(X_i) = p_i$. Поэтому $M\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) = \sum_{i=1}^{5} p_i.$

Аналогично вычисляется дисперсия случайной величины.

226. Вероятность появления правильного ответа при каждом испытании равна $\frac{1}{5}$. Случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей.

228. Пусть событие A означает, что в первом испытании случайная величина попала в интервал $]1{,}7;\ 1{,}9[$, событие B — что во втором испытании случайная величина попала также в интервал $]1{,}7;\ 1{,}9[$. Тогда событие AB означает, что случайная величина оба раза приняла значение из интервала $]1{,}7;\ 1{,}9[$. Тогда $p(AB) = P(1{,}7 < X < 1{,}9) \cdot P(1{,}7 < X < 1{,}9)$.

230. Используя свойства интегральной функции, можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = A + B\cdot\pi = 0,\\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = A + B\cdot 0 = 1.\end{cases}$$

231. Докажите, что в интервале $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$ функция $\cos x$ является монотонно возрастающей. И кроме того на этом интервале $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

233. Используйте свойство симметричности графика функции $p(x)$ относительно прямой $x = 0$.

235. Из графика функции $p(x)$ (рис. 22) видно, что

$$P(1 < X < 2) = S_{ABCD}.$$

236. В случае б) примените формулу $p(A + B) = p(A) + p(B)$, а в случае в) примените формулу Бернулли для повторных независимых испытаний.

237. Найдите значения, при которых функция $p(x) = 0$, т. е. решите уравнение $2ax - ax^2 = 0$. Откуда $x_1 = 0$; $x_2 = 2$. Так как случайная величина X принимает положительные значения, то $0 < X < 2$.

238. Так как $P\left(-\frac{\pi}{2} < X < 0\right) = F(0) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, то искомая вероятность численно равна длине отрезка OA (рис. 23).

241. Используйте свойства $M(X - 1) = M(X) - 1$, $D(X-1) = D(X)$.

243. $M(Y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\frac{1}{2}\cos x\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx =$

$= \frac{1}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x d(2x) = 0.\ D(Y) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\frac{1}{2}\cos x\,dx =$

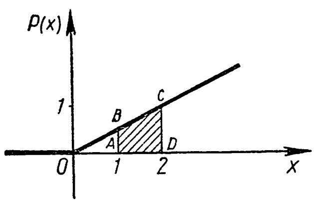


Рис. 22

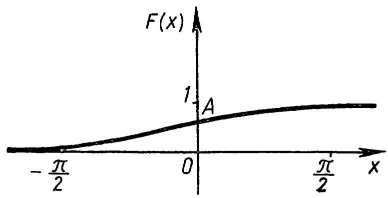


Рис. 23

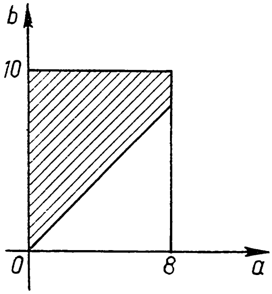


Рис. 24

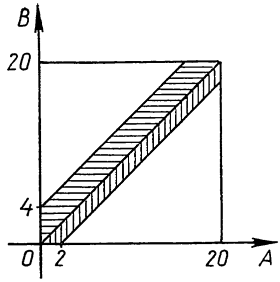


Рис. 25

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x d(\sin x) = \frac{1}{6}\sin^3 x \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

244. Используя данный график, составьте вначале интегральную функцию

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{4}x & \text{при } 0 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

247. Пусть случайная величина X распределена равномерно на интервале $]a;\ b[$. Тогда, применяя формулы математического ожидания и дисперсии случайной величины X, легко составить и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 8, \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

249. В прямоугольной системе координат xoy постройте область, удовлетворяющую системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 100, \\ x^2 + y^2 > 64. \end{cases}$$

251. Так как корень уравнения $x = \frac{b}{a}$ должен быть больше 1, то рассматриваемому событию соответствуют исходы испытания, удовлетворяющие неравенству $b > a$ (рис. 24).

252. Для решения задачи воспользуйтесь рисунком 25.

254. Рассматриваемые испытания удовлетворяют схеме Бернулли.

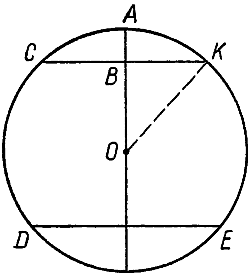


Рис. 26

255. Воспользуйтесь последовательно формулами $F(x) = P(X < x)$ и $P(X < x) = \frac{V_x}{V_R}$, где V_x — объем шара радиуса x и V_R — объем шара радиуса R.

256. Случайная величина X распределена на интервале $]0;\ 2R[$. $P(X < x) = \frac{2|AB|}{2R} = \frac{|AB|}{R}$ (рис. 26), где $|CK| = |DE| = x$. Но $|AB| = R - |BO| = R - \sqrt{|OK|^2 - |KB|^2} = R - \frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2}$.

Значит, $F(x) = P(X < x) = 1 - \frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2R}$.

259. Используйте лемму Чебышева (50). Тогда α находится из условия $1 - \frac{M(x)}{\alpha} \geqslant 0{,}4$.

263. Случайная величина X означает, что число изделий высшего качества имеет биномиальное распределение вероятностей. Следовательно, $D(X) = npq$.

264. Используйте теорему Чебышева (52). Тогда n находится из условия $1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \geqslant 0{,}95$.

266. Проверьте выполнение трех условий: 1) случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ должны быть независимы; 2) $M(X_i)$ должно быть конечным; 3) $D(X_i)$ ограничена одной и той же постоянной C.

269. Сравните заданную функцию распределения с формулой (55).

270. Максимальное значение функция $p(x)$ принимает при $x = a$ и, следовательно, оно равно $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

274. $M(Y) = M(4X - 2) = 4M(X) - 2$.

275. По формуле (56) найдите вероятность $P(4 < X < 6)$. Затем найдите $P_2(m \geqslant 1) = 1 - (P(4 < X < 6))^2$, так как случайное событие означает принятие значения случайной величины вне интервала $]4;\ 6[$.

276. Из формулы (56) следует, что $\Phi\left(\frac{60 - 50}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{50 - 50}{\sigma}\right) = 0{,}3413$. Или: $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi(0) = 0{,}3413$.

Используя таблицу функции Лапласа, найдите σ.

279. Из формулы (57) следует, что $P(a - \alpha < X < a + \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$. По условию $2\Phi\left(\frac{\alpha}{0{,}2}\right) = 0{,}9544$. Отсюда можно найти α.

Искомый интервал будет $]22 - \alpha;\ 22 + \alpha[$. Можно воспользоваться и следствием 2 § 7 главы II. Так как $P(|X - a| < 2\sigma) = 0{,}9544$, то искомый интервал будет $]a - 2\sigma;\ a + 2\sigma[$.

ОТВЕТЫ

1. а) 11; б) 3; в) 28. **2.** а) 7; б) 7; в) 3; г) 11; д) 4. **3.** Первый, четвертый. **4.** а) (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), ..., (6; 6); б) (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6),(2; 2), (2; 3), ..., (6; 6); в) 2, 3..., 12. **5.** В случаях (в) и (г). **6.** 1) в случаях (а) и (г); 2) в случаях (б) и (д); 3) в случае (в). **7.** В случаях (а), (в), (г). **8.** $2^3 = 8$. **9.** $p \approx 0,2667$. **10.** $p \approx 0,000036$. **11.** а) $p = \frac{1}{3}$; б) $p = \frac{8}{15}$; в) $p = \frac{2}{5}$. **12.** а) $p = \frac{71}{365}$; б) $p = \frac{11}{365}$. **13.** $p \approx 0,2667$. **14.** $p = 0,125$. **15.** $p = 0,5$. **16.** $p = \frac{3}{28}$. **17.** $p = 0,75$. **18.** $p = 0,375$.

19.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

20. $p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,375$; $p_3 = 0,25$.

21. Появление белого или черного шара. **22.** а) Появление жетона, номер которого кратен или двум, или пяти, или десяти; б) появление жетона, номер которого кратен десяти. **23.** Выход из строя всей цепи. **24.** Выход из строя всей цепи. **25.** Появление не более пяти очков. **26.** Все 15 электрических лампочек стандартные. **27.** Вторая, третья. **28.** В случае (а) события A и B несовместные. **29.** В случаях (а) и (в) события A и B несовместные. **30.** а) $A \subset B$, б) $B \subset A$. **31.** Событие B — выигрыш по билету одной лотереи. Событие C — выигрыш по билету хотя бы одной лотереи. **32.** Событие B — попадание при одном выстреле. Событие C — попадание при двух выстрелах. **33.** Событие $A + BC$ произошло, остальные не произошли. **35.** $AB = A$; $A + B = B$, $A + B + C = B + C$; $(A + B)\,C = BC$. **36.** $A + \overline{A}B + \overline{A + B} = A + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} = A + \overline{A}(B + \overline{B}) = A + \overline{A}U = A + \overline{A} = U$. **38.** а) Выбран студент моложе двадцати лет, получивший «отлично» на экзамене, из числа живущих в общежитии; б) каждый студент старше 20 лет получил «отлично» и живет в общежитии; в) каждый студент моложе 20 лет живет в общежитии; г) да. **39.** а) $\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$; б) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n + \ldots + \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-1}A_n$; в) $\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n + \ldots + \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-1}A_n + A_1A_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n +$

$+ \ldots + \bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-2}A_{n-1}A_n$. **40.** В случаях (а) и (г) события совместные. **41.** $p = \frac{17}{90}$. **42.** $p = 0{,}86$. **43.** $p = \frac{17}{30}$. **44.** $p = 0{,}5$. **45.** $p \approx 0{,}617$. **46.** $p = p^2(1-p)^2$. **47.** $p = 0{,}125$. **48.** $p = \frac{1}{64}$. **49.** $p = \frac{1}{32}$. **50.** $p(A+B) = \frac{11}{12}$. **51.** События A и B совместны. **52.** $p = 0{,}82$. **53.** $p = 0{,}5$. **54.** $p = 0{,}941$. **55.** $p = 0{,}975$. **56.** $p = 0{,}14$. **57.** $p = 0{,}154$. **58.** $p_1 = 0{,}044$, $p_2 = 0{,}006$. **59.** $p = 0{,}8624$. **60.** $p = 0{,}497$. **61.** В первом случае события A и B независимые, а во втором — зависимые. **63.** События A и B не являются независимыми. **64.** в) Да. **65.** $N_1 = 10$; $N_2 = 24$. **66.** $N = 16$. **67.** $N_1 = 7$; $N_2 = 40$. **68.** $N = 24$. **69.** $N_1 = 90$; $N_2 = 100$. **70.** $N = 63$. **71.** $N = 24$. **72.** $N = 16$. **73.** $N_1 = 24$; $N_2 = 50$. **74.** $N = 134$. **75.** $N = 85$. **76.** $N = 80$. **77.** $N = 26820600$. **78.** $n(A \cup B \cup C) = 47$, но $47 > 45$. **79.** $N' = 30 - n(A \cup B \cup C) = 15$. **80.** $N_1 = 11$; $N_2 = 4$. **82.** $N = 266$. **83.** $N = 12$. **84.** $N = 36 - (C_4^1 \cdot 10 - C_4^2 \cdot 8 + C_4^3 \cdot 7 - C_4^4 \cdot 4) = 20$. **85.** 3^m. **86.** $n \leqslant 2^{32}$. **87.** $5^4 = 625$. **88.** $\tilde{A}_4^{12} = 4^{12}$. **89.** $\tilde{A}_2^9 = 512$. **90.** $A_7^3 = 210$. **91.** $P_7 = 7!$ **92.** $A_5^2 = 20$. **93.** $P_{10} = 10!$ **94.** $C_{30}^2 = 435$. Можно. **95.** $5!A_5^3 = 7200$. **96.** $A_4^3A_5^3A_6^3 = 172800$. **97.** $2P_3 = 12$. **98.** $\frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$. **99.** $C_7^2C_9^2 = 756$. **100.** $2C_5^3C_6^4C_6^3 = 6000$. **101.** а) $C_{28}^2C_4^2 = 2268$; б) $C_{28}^2C_4^2 + C_{28}^1C_4^3 + 1 = 2381$. **102.** $3C_5^2 = 30$. **103.** $\frac{mn(m+n-2)}{2}$. **104.** $C_{12}^3C_9^3C_6^3 = \frac{12!}{(3!)^4} = 369600$. **105.** $C_{32}^{12}C_{20}^{12}$. **107.** $C_3^1C_5^3 + C_3^2C_5^2 = 60$. **109.** $\frac{7!}{14} = 360$. **110.** $P(3, 2) = 10$. **111.** $P(5, 3, 2) = 2520$. **112.** $P(2, 3, 2, 2, 1) = 75600$; $P(3, 1, 1, 1, 1, 1) = 6720$. **113.** $P(2, 3, 4) = 1260$. **114.** $4\tilde{A}_5^3 = 500$. **115.** $\tilde{C}_{10}^8 = 24310$. **116.** $\tilde{C}_{10}^3 = 220$. **117.** $5^3 \cdot 4^2 = 2000$. **118.** $C_{20}^6 P(3, 2, 1)$. **119.** $N = 128$. **120.** $\tilde{A}_{10}^4 (24 + 24^2 + 24^3) = 14424 \cdot 10^4$. **121.** $P(4, 1, 1, 1, 1) - 5! = 1560$. **122.** $p = \frac{1}{8!}$. **123.** $p \approx 0{,}0167$. **124.** $p = \frac{5}{9 \cdot 2^{n-1}}$. **125.** $p = 0{,}8$. **126.** $p \approx 0{,}0047$. **127.** $p \approx 0{,}0381$. **128.** $p \approx 0{,}1515$. **129.** $p = 0{,}3$. **130.** $p = 0{,}6$. **131.** $p = \frac{2}{3}$. **132.** $p \approx 0{,}3580$. **133.** $p = \frac{1}{7}$. **134.** $p = \frac{1}{210}$. **135.** $p \approx 0{,}2857$. **136.** $p = \frac{2}{15}$. **137.** $p \approx 0{,}4242$. **138.** $p = \frac{2}{35}$. **139.** $p = 0{,}0235$. **140.** $p \approx 0{,}0077$. **141.** $p = 0{,}3$. **142.** $p = 0{,}625$. **143.** $p = \frac{1}{60}$. **144.** $p = 0{,}4$. **145.** $p = 0{,}72$. **146.** $p = 0{,}75$. **148.** $p_1 = p_2 = 0{,}75$. **149.** $p_1 = \frac{3}{14}$; $p_2 = \frac{3}{11}$; $p_3 = \frac{5}{13}$; $p_4 = \frac{3}{7}$. **150.** $p_1 = \frac{7}{15}$; $p_2 = 0{,}5$. **151.** $p = \frac{8}{15}$. **152.** $p \approx 0{,}0389$. **153.** $p = \frac{5}{6}$. **154.** $p = \frac{6}{13}$. **155.** $p \approx 0{,}5385$. **156.** $p \approx 0{,}5882$. **157.** $p = 0{,}375$. **158.** $p_1 \approx 0{,}2667$; $p_2 = 0{,}7$;

$p_3 \approx 0{,}0333$. **159.** а) $p \approx 0{,}4762$; б) $p \approx 0{,}0476$. **160.** $p \approx 0{,}3158$. **161.** $p = \frac{3}{7}$. **162.** $P_6(3) \approx 0{,}1852$. **163.** $P_4(1) = 4p^3(1-p)$. **164.** $P_4(2) > P_6(3)$. **165.** $P_7(5) \approx 0{,}2753$. **166.** $P_5(m \geqslant 1) = 0{,}9976$. **167.** $P_n(m \geqslant 1) = 1 - (1-p)^n$. **168.** $p = 0{,}7$. **169.** $n \geqslant 45$. **170.** $n \geqslant 21$. **171.** $P_{10}(m \geqslant 9) \approx 0{,}3758$. **172.** а) $P_4(3) = 0{,}0256$; б) $P_4(m \geqslant 3) = 0{,}0272$. **173.** $m_0 = 22$. **174.** $n = 105$. **175.** $0{,}3741 \leqslant p \leqslant 0{,}3765$. **176.** $p \approx 0{,}1719$. **177.** $m = 5$. **178.** а) $P_{10}(4) \approx 0{,}2276$; б) $P_{10}(4) \approx 0{,}2419$; в) $\delta = 6{,}28\%$. **179.** $P_{80}(10) \approx 0{,}0726$. **180.** $P_{20}(4) > P_{30}(6)$. **181.** а) $P_{25}(5) \approx 0{,}1995$; б) $P_{25}(5 \leqslant m \leqslant 7) = 0{,}4966$. **182.** $P_{80}(10 \leqslant m \leqslant 20) \approx 0{,}8185$. **183.** $P_{900}(100 \leqslant m \leqslant 120) \approx 0{,}1330$. **184.** $P_{6000}(4750 \leqslant m \leqslant 6000) \approx 0{,}9463$. **185.** а) $P_{100}(2) \approx 0{,}2848$; б) $P_{100}(m \geqslant 1) \approx 0{,}8972$; в) $P_{100}(2 \leqslant m \leqslant 3) \approx 0{,}5054$. **186.** $P_{600}(m > 2) \approx 0{,}5768$. **187.** а) $P_{800}(5) \approx 0{,}0361$; б) $P_{800}(3 \leqslant m \leqslant 5) \approx 0{,}3067$. **188.** $P_n(7) \approx 0{,}1053$. **189.** $P_{75}(25) \approx 0{,}0265$. **190.** Первая, третья, четвертая. **191.** $x_i = 0; 1; 2; \ldots, 25$. **192.** $y_i = 1; 2; 3; 4; 5; 6$. **193.** а) равномерное; б) биномиальное. **194.** Гипергеометрическое распределение вероятностей.

195.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0625	0,2500	0,3750	0,2500	0,0625

196.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

197.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

198.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

$P(2 \leqslant X \leqslant 3) = 10p^2q^3 + 10p^3q^2 = 10p^2q^2(q+p) = 10p^2q^2$.

199.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{57}{115}$	$\frac{19}{46}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{230}$

200.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,9	0,09	0,009	0,0009	0,0001

$P(X < 4) = 0{,}999$.

201.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,03125

202.

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

; $P(X < 3) = 0{,}8$.

203.

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	e^{-2}	$2e^{-2}$	$\frac{2^2}{2!}e^{-2}$	...	$\frac{2^m}{m!}e^{-2}$	...

204.

x_i	0	1	2	...	m	...
p_i	e^{-3}	$3e^{-3}$	$\frac{3^2}{2!}e^{-3}$	...	$\frac{3^m}{m!}e^{-3}$	...

205.

y_j	9	16
q_j	0,8	0,2

;

z_k	—9	9	12
p_k	0,3	0,5	0,2

206.

y_j	—1	0	1
q_j	$\frac{1}{2^{3+4k}}$	$\frac{1}{2^{2+2k}}$	$\frac{1}{2^{1+4k}}$

, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

207.

z_k	0	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$

208.

z_k	5	6	7
p_k	0,12	0,56	0,32

209.

$z_k^{(1)}$	0	2	4	5	6	7	9	10	11	12	14	16
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$

$z_k^{(2)}$	0	10	20	30	40	60
p_k	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$

210. $P(X = 6) = 0{,}25$; $M(X) = 5{,}9$; $D(X) = 5{,}79$; $\sigma(X) = 2{,}4$. **211.** $M(t)=4$. **212.** $D(X) < D(Y)$. **213.** $P(\overline{X} - \sigma \leqslant X \leqslant \overline{X} + \sigma) = 0{,}7$. **214.** $M(X) = 36$; $D(X) = 3{,}6$. **215.** $n = 25$. **216.** $M(X) = 4$; $D(X) = 12$.

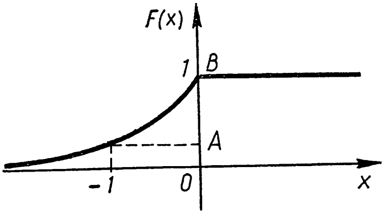


Рис. 27

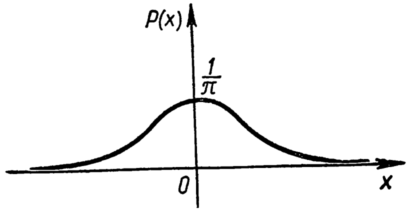


Рис. 28

218. $M(X) \approx D(X) \approx 50$.

219.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{220}{455}$	$\frac{198}{455}$	$\frac{36}{455}$	$\frac{1}{455}$

; $M(X) = 0{,}6$.

220. $M(Z) = 6{,}5$. **221.** $D(Z) = 1{,}8$. **222.** а) $M(2X - 3) = 11$; $D(2X - 3) = 4{,}8$; б) $M(4X) = 28$; $D(4X) = 19{,}2$; в) $M(3X + 5) = 26$; $D(3X + 5) = 10{,}8$. **223.** $M(Z) = 23$. **224.** $M(X) = 0{,}38$; $D(X) = 0{,}3494$.

225.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}3 & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 0{,}8 & \text{при } 2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

226. а)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

б)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{256}{625} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{512}{625} & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{608}{625} & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ \frac{624}{625} & \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

227. а)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{8} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ \frac{7}{8} & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

б) $M(X) = 1{,}5$; $D(X) = 0{,}75$. **228.** а) $P(1{,}75 < X < 2) = 0{,}5$; б) $p = 0{,}16$.
229. $P(-1 < X < 0) = 0{,}75$ (рис. 27), отрезок AB. **230.** $A = 1$; $B = -\frac{1}{\pi}$.

231. Да. **232.** $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 2a, \\ \frac{2}{a} & \text{при } 2a < x \leqslant \frac{5}{2}a, \\ 0 & \text{при } x > \frac{5}{2}a. \end{cases}$ **233.** $p(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$, рисунок 28. 234. 1) $p(x) = \begin{cases} 4^x \ln 4 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0 & \text{при } x > 0; \end{cases}$ 2) $P(-0{,}5 < X < 0) = 0{,}5$.

235. 1) $a = 2$. 3) $P(1 < X < 2) = 0{,}75$. 236. 1) $M(X) = 2\frac{2}{3}$; $D(X) = \frac{8}{9}$; $\sigma(X) = 0{,}94$. 2) а) $p = \frac{3}{64}$; б) $p = 0{,}1875$; в) $p = 0{,}3125$. 237. $0 < X < 2$;

$a = \frac{3}{4}$; $M(X) = 1$. 238. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

$P\left(-\frac{\pi}{2} < X < 0\right) = 0{,}5$. 239. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 6, \\ \frac{x^2}{4} - 3x + 9 & \text{при } 6 < x \leqslant 8, \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$ 240. $A = 6$. 241. $M(Y) = \frac{7}{12}$; $D(Y) \approx 1{,}076$. 242. $M(Y) = 0{,}4$; $D(Y) = 0{,}09$.

243. $M(Y) = 0$; $D(Y) = \frac{1}{3}$. 244. $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{4} & \text{при } 0 < x \leqslant 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$

Равномерное распределение вероятностей.

245. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 3, \\ \frac{x-3}{5} & \text{при } 3 < x \leqslant 8, \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$ 246. $M(X) = 7$; $D(X) = 3$; $\sigma(X) = 3$.

247. $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 7, \\ \frac{1}{2} & \text{при } 7 < x \leqslant 9, \\ 0 & \text{при } x > 9. \end{cases}$ 248. $p \approx 0{,}707$. 249. $p = 0{,}36$. 250. $p = \frac{(a-2r)^2}{\pi R^2}$. 251. $p = 0{,}6$. 252. $p = 0{,}275$. 253. $p = \frac{b^3}{a^3}$. 254. $p \approx 0{,}35$.

255. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{x^3}{R^3} & \text{при } 0 < x \leqslant R, \\ 1 & \text{при } x > R; \end{cases}$ $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \frac{3x^2}{R^3} & \text{при } 0 < x \leqslant R, \\ 0 & \text{при } x > R. \end{cases}$

256. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2R} & \text{при } 0 < x \leqslant 2R, \\ 1 & \text{при } x > 2R. \end{cases}$ 257. $P(X \leqslant 2000) \geqslant 0{,}75$.

258. $P(X > 900) < 0{,}667$. 259. $X \leqslant 1000$. 260. $P(|X - 20| \leqslant 5) \geqslant 0{,}84$. 261. $P(|X - 30| \leqslant 6) \geqslant 0{,}306$; $P(24 < X < 36) \approx 0{,}77$. 262. $P(|X - 360| \leqslant 20) \geqslant 0{,}64$; $P(340 \leqslant X \leqslant 380) \approx 0{,}905$. 263. $624 \leqslant X \leqslant 656$.

264. $n \geqslant 400$. 265. $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2000} X_i - a\right| \leqslant 0{,}15\right) \geqslant 0{,}9$. 266. а) $M(X_n) = 0$;

$D(X_n) = \alpha^2$. Да, применима; б) $M(X_n) = 0$; $D(X_n) = \frac{1}{2} n^2\alpha^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Нет, не применима. **267.** $M(X_n) = \frac{a+b}{2}$; $D(X_n) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Да, применима. **268.** $P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}\right| \leqslant 0,1\right) \geqslant 0,875$. **269.** $A = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$; $P(2 < X < 5) \approx \approx 0,3746$. **270.** В три раза. **271.** $\sigma(X) = 2\sqrt{2}$; $D(X) = 8$. **272.** $a = 1$; $\sigma \approx 2$. **273.** $a = 5$. **274.** $M(Y) = 10$. **275.** $P_2(m \geqslant 1) = 0,0891$. **276.** $D(X) = 100$. **277.** $]-1,72,\ 1,72[$. **278.** $P(|X| < 0,5) \approx 0,9876$. **279.** $]21,6;\ 22,4[$. **280.** $W = 0,25$. **281.** $n = 34$.

286.

x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m_i	4	5	3	5	5	3	2	2	1

287.

x_i	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
m_i	1	2	2	3	4	2	2	3	1	2	2

290. $\overline{X} = 15\frac{1}{6}$; $D(X) = 5\frac{1}{180}$; $\sigma(X) = 2,24$; $V = 14,8\%$. **291.** $\overline{X} = 23$; $D(X) = 8\frac{1}{6}$; $\sigma(X) = 2,86$; $V = 12,4\%$. **294.** $P\left(\left|\frac{m}{320} - \frac{1}{6}\right| \leqslant 0,03\right) \approx 0,8502$. **295.** $P\left(\left|\frac{m}{600} - 0,4\right| \leqslant 0,04\right) \approx 0,9544$. **296.** $n = 889$. **297.** $\varepsilon = 0,01$. **298.** $0,110 < p < 0,156$. **299.** $0,128 < p < 0,172$. **300.** а) $49,88 < a < 50,12$; б) $50,82 < a < 51,18$; в) $51,72 < a < 52,28$. **301.** а) $n = 39$; б) $n = 27$; в) $n = 16$. **303.** $\overline{y}_x = 0,05x + 0,04$. **304.** $\overline{y}_x = 0,63x - 5,41$.

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$

z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3888
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)
1,60	0,4452	1,84	0.4671	2,16	0,4846	2,66	0,4961
1,61	0,4463	1,85	0,4678	2,18	0,4854	2,68	0,4963
1,62	0,4474	1,86	0,4686	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,63	0,4484	1,87	0,4693	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,64	0,4495	1,88	0,4699	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,65	0,4505	1,89	0,4706	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,66	0,4515	1,90	0,4713	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,67	0,4525	1,91	0,4719	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,68	0,4535	1,92	0,4726	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,69	0,4545	1,93	0,4732	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,70	0,4554	1,94	0,4738	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,71	0,4564	1,95	0,4744	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,72	0,4573	1,96	0,4750	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,73	0,4582	1,97	0,4756	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,74	0,4591	1,98	0,4761	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,75	0,4599	1,99	0,4767	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,76	0,4608	2,00	0,4772	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,77	0,4616	2,02	0,4783	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,78	0,4625	2,04	0,4793	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,79	0,4633	2,06	0,4803	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,80	0,4641	2,08	0,4812	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,81	0,4649	2,10	0,4821	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,82	0,4656	2,12	0,4830	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,83	0,4664	2,14	0,4838	2,62	0,4956	4,50	0,499997
				2,64	0,4959	5,00	0,4999997

Приложение 2

Таблица значений $t_\alpha = t(\alpha, n)$

n	α			n	α		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 3

Таблица значений $q = q(\alpha, n)$

n	α			n	α		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ №3976

Наум Яковлевич ВИЛЕНКИН
Владимир Григорьевич ПОТАПОВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ КОМБИНАТОРИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Редактор *Л. В. Привезенцева*
Художественный редактор *К. К. Федоров*
Технический редактор *М. М. Широкова*
Корректор *Т. Ф. Алексина*

Сдано в набор. 11. 08. 78. Подписано к печати 22. 12. 78. $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типограф. № 3. Литер. гарн. Высокая печать. Условн. печ. л. 7. Уч.-изд. л. 6,22. Тираж 27 000 экз. Заказ № 800. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.